

Hochschild-Kohomologien  
von  
Observablenalgebren  
in der  
Klassischen Feldtheorie

Diplomarbeit

vorgelegt von

Maximilian Hanusch

September 2010

Wissenschaftliche Betreuung:

Apl. Prof. Dr. Stefan Waldmann

PHYSIKALISCHES INSTITUT  
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK  
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iii</b>
<b>1. Hochschild-Kohomologien</b>	<b>1</b>
1.1. Einführung . . . . .	1
1.2. Die Hochschild-Kohomologie der Algebra $\text{Pol}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	6
1.3. Die Hochschild-Kohomologie der Algebra $S^\bullet(\mathbb{V})$ . . . . .	10
1.3.1. Die symmetrische und die Graßmann Algebra . . . . .	10
1.3.2. Bestimmung der Hochschild-Kohomologie von $S^\bullet(\mathbb{V})$ . . . . .	11
1.3.3. Explizite Kettenabbildungen . . . . .	21
<b>2. Topologische Komplexe und stetige Hochschild-Kohomologien</b>	<b>35</b>
2.1. Vorbereitung . . . . .	35
2.2. Die stetige Hochschild-Kohomologie der Algebra $S^\bullet(\mathbb{V})$ . . . . .	41
2.3. Die stetige Hochschild-Kohomologie der Algebra $\text{Hol}(\mathbb{V})$ . . . . .	54
<b>3. Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme</b>	<b>71</b>
3.1. Vorbereitung . . . . .	71
3.2. Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme . . . . .	75
<b>4. Differentielle Hochschild-Kohomologien</b>	<b>85</b>
4.1. Multidifferentialoperatoren und symmetrische Bimoduln . . . . .	85
4.2. Differentielle Bimoduln . . . . .	93
<b>A. Algebraische Grundlagen</b>	<b>103</b>
A.1. Ringe, Moduln und Kategorien . . . . .	103
A.2. Homologische Algebra . . . . .	109
A.2.1. Komplexe und Homologien . . . . .	110
A.2.2. Homotopie . . . . .	112
A.2.3. Auflösungen . . . . .	114
A.2.4. Rechtsinduzierte Funktoren . . . . .	116
<b>B. Lokalkonvexe Analysis</b>	<b>121</b>
B.1. Grundlagen . . . . .	121
B.2. Vervollständigungen . . . . .	125
B.3. Tensorprodukte lokalkonvexer Vektorräume und deren Topologien . . .	138



# Einleitung

Dem Wesen theoretischer Arbeiten im Bereich der mathematischen Physik entsprechend, bereichert auch diese Diplomarbeit auf zweierlei Weisen. Zum einen bietet sie eine Fülle an mathematischem Abwechslungsreichtum, da hier sowohl algebraische als auch topologischen Methoden zum Einsatz kommen, die das Erreichen der im Rahmen dieser Arbeit erstrebten Ziele durch ihr elegantes Zusammenspiel überhaupt erst ermöglichen. Die Kombination von abstrakter homologischer Algebra mit Funktional-Analytischen Konzepten wird unter Ausnutzung explizit konstruierter Kettenabbildungen tiefere Erkenntnisse über die gewünschten Hochschild-Kohomologien liefern, die im Rahmen des allgemeinen algebraischen Formalismus nicht greifbar wären und über reine Isomorphieaussagen weit hinaus gehen. Die physikalische Motivation ist dabei von dem innigen Wunsch getragen, eine der grundlegendsten physikalischen Theorien, die Quantenfeldtheorie, in ihrer Natur zu ergründen und ihr einzigartiges Zusammenwirken mit den altbewährten klassischen Theorien besser zu verstehen. Der wichtige Beitrag soll hierbei im Rahmen Deformationsquantisierung geleistet werden, die als Bindeglied zwischen den klassischen und den moderneren Quantenfeldtheorien anzusehen ist.

## Motivation

Die Quantisierung einer klassischen Theorie ist eine oftmals schwer zu fassende Prozedur, die sich eher formalen Argumenten bedient, als wirklich die grundlegenden Zusammenhänge aufzuzeigen. Hierbei erweist sich die quantisierte Theorie im Allgemeinen als die fundamentalere von beiden, jedoch ist nicht ignorierbar, dass auch die klassische Theorie die Natur im Rahmen ihres Gültigkeitsbereiches vortrefflich beschreibt. Insofern ist es eine interessante und zudem absolut nicht-triviale Frage, unter welchen Bedingungen und aus welchem Grund die klassische Theorie der allgemeineren Quantentheorie vorzuziehen ist. Eng damit verbunden ist Frage, inwiefern wir unsere bisherigen Ansichten über die täglich erlebte Realität in Frage stellen müssen. Denn es ist sicher nicht klar, ob die Quantenfeldtheorie oder spezieller die Quantenmechanik nicht auch in anderen Bereichen als dem Mikrokosmos anwendbar ist. Imposante Beispiele sind hierbei sicher das Konzept der Superposition von Zuständen und die Rolle des Messprozesses an sich. Diese haben in der klassischen Mechanik keine Bedeutung, sorgen jedoch in der Quantenmechanik dafür, dass sich die physikalische Realität eines ganzen Quantensystems allein durch eine Messung vollkommen verändert werden kann.

## Deformation von Observablenalgebren

In der klassischen Mechanik besteht der Konfigurationsraum aus Orts- und-Impulskoordinaten  $q$  und  $p$  und kann bei einem  $n$ -Teilchensystem als  $\mathbb{R}^{2n}$  aufgefasst werden. Geläufige assoziativen, kommutative Observablenalgebren sind hierbei die Polynome  $\text{Pol}(\mathbb{R}^{2n})$  oder die glatten Funktionen  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , die vermöge der total antisymmetrischen Poisson-Klammer

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q^k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \quad \forall f, g \in \text{Pol}(\mathbb{R}^{2n}) \text{ oder } C^\infty(\mathbb{R}^{2n}),$$

welche die Leibnizregel und die Jacobiidentität erfüllt, zu einer Poisson-Algebra werden. Auf der anderen Seite besteht der Konfigurationsraum der Quantenmechanik aus einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und die Observablen aus der  $*$ -Unteralgebra der beschränkten Operatoren  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , wobei die hierin enthaltenen selbstadjungierten Operatoren die tatsächlich physikalisch messbaren Observablen sind.

Die Deformationstheorie assoziativer Algebren legt uns nun ein effektives Werkzeug in die Hand, Quantenobservablen aus denen der klassischen Theorie derart zu konstruieren, dass die Nichtkommutativität der neuen Algebrenmultiplikation  $\star$  bereits gewährleistet ist. Hierbei betrachtet man für eine klassische Observablenalgebra  $(\mathcal{A}, *)$  den Raum  $\mathcal{A}[[\hbar]]$  der formalen Potenzreihen in dem formalen Parameter  $\hbar$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{A}$ , in welchen man sich  $\mathcal{A}$  im Vektorraum-Sinne als Monome 0-ter Ordnung eingebettet vorstellen kann. Eine formale Deformation  $\mu$  der Ordnung  $k$  ist dann (vgl. [BFF<sup>+</sup>78]) eine  $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilineare Multiplikation  $\mu: \mathcal{A}[[\hbar]] \times \mathcal{A}[[\hbar]] \rightarrow \mathcal{A}[[\hbar]]$  der Form

$$\mu(a, b) = \sum_{r=0}^k \hbar^r \mu_r(a, b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

mit  $\mathbb{C}$ -bilinearen Abbildungen  $\mu_r: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , so dass  $\mu$  folgende Eigenschaften besitzt:

- i.)  $\mu$  ist assoziativ bis zur Ordnung  $k$ .
- ii.)  $\mu_0(a, b) = a * b$ .
- iii.)  $\mu_1(a, b) - \mu_1(b, a) = i\{a, b\}$ .

Hierbei ist iii.) auch als *Korrespondenzprinzip* bekannt und garantiert, dass der total antisymmetrische Teil des Quanten-Kommutators  $[a, b] := \mu(a, b) - \mu(b, a)$  in der Ordnung  $\hbar$  mit  $i\{\cdot, \cdot\}$  übereinstimmt. Ist  $\hbar$  in der physikalischen Situation eine dimensionsbehaftete Größe, so sind die  $\mu_r$  als Größen der Dimension  $[(Js)^{-r}]$  zu verstehen, womit  $\mu$  eine Multiplikation  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  definiert. Im Falle  $k = \infty$  spricht man von einem Sternprodukt und schreibt  $\star$  anstelle von  $\mu$ . Diese stellen die eigentlich interessanten Objekte dar, wobei hier die physikalische Wohldefiniertheit von  $\mu$ , also die Konvergenz der Summe, ein im Allgemeinen ungelöstes Problem darstellt. Die Existenz und Klassifikation solcher Sternprodukte sind für die klassische Situation wohlverstandene

Probleme und wurde für die Algebra  $C^\infty(M)$  einer endlich-dimensionalen symplektischen Mannigfaltigkeit  $M$  erstmals von Lecomte und de Wilde [DL83, DL88] unter Verwendung kohomologischer Überlegungen gelöst. Einen sehr einfachen und geometrischen Existenzbeweis liefert zudem die Fedosov-Konstruktion, die ohne kohomologische Überlegungen auskommt und sich lediglich „konventioneller“ Techniken wie kovarianter Ableitungen und dem Tensoralkül bedient, vgl. [Fed96]. Ganz allgemein für endlich-dimensionale Poisson-Mannigfaltigkeiten wurde das Existenz- und Klassifikations-Problem von Kontsevich (vgl. [Kon03]) gelöst.

Ein einfache Verfahren um Sternprodukte zu erhalten, ist, sich diese Ordnung für Ordnung zu konstruieren. dabei sind die Assoziativität von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}[[\hbar]]$  die entscheidenden Faktoren. Hierfür betrachten wir eine formale Deformation  $\mu = \mu_0 + \dots + \mu_k$  der Ordnung  $k$ , die wir durch ein  $\mathbb{C}$ -bilineares  $\mu_{k+1}$  zu einer formalen Deformation  $\circ = \mu + \hbar^{k+1}\mu_{k+1}$  der Ordnung  $k+1$  fortsetzen wollen. Dann muss die Bedingung  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$  insbesondere für alle  $a, b, c \in \mathcal{A}$  bis zur Ordnung  $k+1$  erfüllt sein, in welcher wir erhalten, dass<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} a * \mu_{k+1}(b, c) - \mu_{k+1}(a * b, c) + \mu_{k+1}(a, b * c) - \mu_{k+1}(a, b) * c \\ = \underbrace{\sum_{r=1}^k [\mu_r(\mu_{k+1-r}(a, b), c) - \mu_r(a, \mu_{k+1-r}(b, c))]}_{R_k} \end{aligned}$$

gilt, was mit Hilfe des Hochschild-Differentials auch in der Form  $\delta\mu_{k+1} = R_k$  geschrieben werden kann. Eine längere Rechnung unter Ausnutzung der Assoziativität von  $\mathcal{A}$  zeigt zudem  $\delta R_k = 0$ , womit ein derartiges  $\mu_{k+1}$  nur dann gefunden werden kann, wenn  $[R_k]$  die 0-Klasse ist. In diesem Sinne bilden die Elemente der dritten Hochschild-Kohomologie  $HH^3(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  der Algebra  $\mathcal{A}$ , die Quelle von Obstruktionen für die Fortsetzbarkeit formaler Deformationen zu Sternprodukten und es lässt sich zeigen, dass die zweite Hochschild-Kohomologie die Äquivalenzklassen von infinitesimalen Deformationen, also solchen bis zur Ordnung 1 klassifiziert. Ist hingegen ein Sternprodukt  $(\mathcal{A}[[\hbar]], \star)$  für eine assoziative und kommutative Algebra  $\mathcal{A}$  vorgegeben und hat man einen  $\mathcal{A}$ -Modul  $\mathcal{M}$ , dessen Modulstruktur man auf  $\mathcal{A}[[\hbar]]$  fortsetzen möchte, so sind die Hochschild-Kohomologien  $HH^2(\mathcal{A}, \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}))$  und  $HH^1(\mathcal{A}, \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}))$  von entscheidender Wichtigkeit<sup>2</sup> für das Deformationsproblem.

Die Berechnung dieser Hochschild-Kohomologien ist ein für Observablenalgebren auf endlich-dimensionalen Vektorräume, wie es beispielsweise der Konfigurationsraum der klassischen Mechanik ist, gut verstandenes Problem. Die Kohomologie-Gruppen  $HH^k(\text{Pol}(\mathbb{R}^n), \text{Pol}(\mathbb{R}^n))$  wurden erstmals von Hochschild, Kostant und Rosenberg im Rahmen des Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoremes bestimmt (vgl. [HKR62]), welches insbesondere besagt, dass jede Kohomologieklassse  $[\eta] \in HH^k(\text{Pol}(\mathbb{R}^n), \text{Pol}(\mathbb{R}^n))$  genau einem  $k$ -Multivektorfeld entspricht. Analoge Aussagen wurden ebenfalls für lo-

<sup>1</sup>vgl. [Wei09, Kapitel 2]

<sup>2</sup> $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M})$  ist hier als  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul aufzufassen

kalen, stetigen und die differentiellen Hochschild-Kohomologien

$$\begin{aligned} & HH_{\text{diff}}^k(C^\infty(M), C^\infty(M)), \\ & HH_{\text{loc}}^k(C^\infty(M), C^\infty(M)) \quad \text{und} \\ & HH_{\text{cont}}^k(C^\infty(M), C^\infty(M)) \end{aligned}$$

gezeigt [Pfl98, Con94, CGD80]. In [Wei09] wurden zudem die stetig-differentielle Hochschild-Kohomologie  $HH_{\text{c,d}}^k(C^\infty(V), \mathcal{M})$  für differentielle  $C^\infty(V) - C^\infty(V)$ -Bimoduln  $\mathcal{M}$  mit einer konvexen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  berechnet.

## Observablenalgebren in der Feldtheorie, die symmetrische Algebra

In jeder klassischen Feldtheorie besteht der Konfigurationsraum aus Feldern, die im Speziellen selbst die glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit, aber in jedem Falle unendlich-dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume<sup>3</sup> sind. Ist zum Beispiel  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $\mathcal{D}(X)$  der Testfunktionen-Raum der glatten Funktionen von  $X \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger in  $X$ . Dann ist man insbesondere an den Observablen der Form

$$p(\psi) = \sum_{k=0}^n \int_{X_1 \times \dots \times X_k} \phi_k(x_1, \dots, x_k) \psi(x_1) \dots \psi(x_k) dx_1 \dots dx_k$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(X)$ ,  $X_i = X$  für alle  $1 \leq i \leq k$  und  $\phi_k \in \mathcal{E}_{\text{sep}}^{\text{sym}}(X^k)$  interessiert. Hierbei bezeichnet

$$\mathcal{E}_{\text{sep}}(X^k) = \left\{ \phi \in \mathcal{E}(X^k) \mid \phi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^n \phi_1(x_1) \dots \phi_k(x_k) \quad \forall (x_1, \dots, x_k) \in X^k \right\}$$

mit  $\phi_1, \dots, \phi_k \in \mathcal{E}(X) = C^\infty(X)$  für alle  $1 \leq i \leq k$  den Vektorraum aller Abbildungen  $X^k \rightarrow \mathbb{R}$ , die als endliche Summe faktorisierender, glatter Funktionen geschrieben werden können und  $\mathcal{E}_{\text{sep}}^{\text{sym}}(X^k)$  den Unterraum der total symmetrische Elemente von  $\mathcal{E}_{\text{sep}}$ . Jedes  $\mathcal{E}_{\text{sep}}(X^k)$  ist eine Realisierung des  $k$ -fachen Tensorproduktes  $T^k(\mathcal{E}(X))$  und  $\mathcal{E}_{\text{sep}}^{\text{sym}}(X^k)$  eine Realisierung des symmetrischen Tensorproduktes  $S^k(\mathcal{E}(X))$ . Mit Hilfe der Abbildung

$$\tau: (\phi, \psi) \longrightarrow \int_X \phi(x) \psi(x) dx$$

und linearer Fortsetzung von

$$\begin{aligned} \Delta: T^k(\mathcal{E}(X)) \times \mathcal{D}(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k, \psi) &\longmapsto \tau(\phi_1, \psi) \dots \tau(\phi_k, \psi) \end{aligned}$$

auf die gesamte symmetrische Algebra  $S^\bullet(\mathcal{E}(X))$ , entspricht diese gerade den Observablen der obigen Form. Möchte man hingegen auch unendliche Summen und symmetrische  $\phi_k$  in ganz  $\mathcal{E}(X^k)$  zulassen, so ist dies möglich, indem man  $\mathcal{E}(X)$  mit der üblichen Fréchet-Topologie versieht und die symmetrische Algebra mit Hilfe des Konzeptes des

---

<sup>3</sup>Hier und im Folgenden bedeutet  $\mathbb{K}$  immer  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .



$\pi$ -Tensorproduktes lokalkonvex topologisiert. Durch Vervollständigung von  $S^\bullet(\mathcal{E}(X))$  erhält man eine Algebra  $\text{Hol}(\mathcal{E}(X))$ , welche die gewünschten Observablen<sup>4</sup> induziert. Sind in diesem Rahmen Feldgleichungen auf  $\mathcal{D}(X)$  durch einen linearen Operator  $\Lambda$  gegeben, so lässt sich unter gewissen Voraussetzungen zeigen (vgl. [BGP07]), dass zu  $\Lambda$  gehörige avancierte und retardierte Greensche Funktionen  $G_{x,y}^+$  und  $G_{x,y}^-$  existieren mit denen man durch derivative Fortsetzung von

$$\{\phi, \psi\} = \Delta(\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{E}(X) \quad \text{mit} \quad \Delta = G_{x,y}^+ - G_{x,y}^-$$

auf ganz  $S^\bullet(\mathcal{E}(X))$ , eine stetige Poisson-Klammer erhält, die stetig bilinear auf  $\text{Hol}(\mathcal{E}(X))$  fortgesetzt werden kann. Hierfür existieren bereits eine Fülle an Beispielen für Sternprodukte (vgl. [DF01], [DF03]), die mit den Resultaten dieser Arbeit nun in einem formalen Rahmen behandelbar sind.

Das eben behandelte Beispiel ist lediglich der Spezialfall eines allgemeinen Konzeptes, das es erlaubt, sich Observablenalgebren mit Hilfe der symmetrischen Algebra zu konstruieren. Hierfür benötigt man lediglich einen Konfigurationsraum  $\mathbb{V}$  und einen hausdorffschen, lokalkonvexen Vektorraum  $(\mathbb{U}, P)$  mit einer  $\mathbb{K}$ -bilineare Abbildung  $\tau: \mathbb{V} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{K}$ , deren Bild sich für festes  $v \in \mathbb{V}$  für alle  $u \in \mathbb{U}$  durch eine Halbnorm aus  $P$  abschätzen lässt. Dann definiert jedes Element aus  $\text{Hol}(\mathbb{U})$  eine auf ganz  $\mathbb{V}$  konvergente Potenzreihenfunktion. Ist beispielsweise  $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$  und  $\mathbb{U} = \mathbb{C}^{n*}$  schwach\*-topologisiert, so entspricht  $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n*})$  gerade den ganz holomorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}^n$ , was gleichzeitig der Grund für die Namensgebung  $\text{Hol}$  ist. Im Falle  $\mathbb{V} = \mathcal{E}(X)$  mit schwach\*-topologisiertem  $\mathbb{U} = \mathcal{E}'(X)$  ist dann beispielsweise die Exponentialfunktion

$$p(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{\delta_z(\phi) \dots \delta_z(\phi)}^{k\text{-mal}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \phi(z)^k$$

in  $\text{Hol}(\mathcal{E}'(X))$  enthalten und die angeführten Beispiele bilden nur einen Bruchteil der Kombinationen, die möglich sind.

## Ziele dieser Arbeit

Die symmetrische Algebra über einem beliebigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$  besitzt die Eigenschaft, dass sie eine Fülle an wichtigen Observablenalgebren der klassischen Feldtheorie als Spezialfall enthält. Das Ziel dieser Arbeit soll es daher sein, die Elementarbausteine der Deformationsquantisierung, die Hochschild-Kohomologien, dieser reichhaltigen Algebra zu berechnen um hiermit die Deformationstheorie dieser Observablenalgebren auf ein festes Fundament zu stellen. Zudem wollen wir in den wichtigen Spezialfällen lokalkonvexer Vektorräume  $\mathbb{V}$  die interessantere stetige Hochschild-Kohomologien von  $S^\bullet(\mathbb{V})$  und im hausdorffschen Fall ebenfalls die ihrer noch umfassenderen Vervollständigung  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  berechnen, welche unter anderem solch wichtige Observablen

<sup>4</sup>Unter der Voraussetzung, dass diese gewisse „Konvergenzbedingungen“ erfüllen.

wie die Exponentialfunktion enthält. Hierbei ist der Nutzen der stetigen Hochschild-Kohomologien darin zu sehen, als dass Sternprodukte, die aus stetigen bilinearen Komponenten  $\mu_r$  bestehen, im Allgemeinen reguläreres Verhalten zeigen und somit leichter zu handhaben sind.

## Resultate

Sei im Folgenden  $\mathbb{V}$  ein beliebig-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann bezeichnet  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \vee)$  die symmetrische Algebra über  $\mathbb{V}$  und  $\mathcal{M}$  einen  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul, der ebenfalls ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist. Befinden wir uns im lokalkonvexen Rahmen, so verstehen wir  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$  als lokalkonvexen Vektorraum mit erzeugendem Halbnormensystem  $P$  und  $S^\bullet(\mathbb{V})$  denken wir uns dann, vermöge dem submultiplikativen Halbnormensystem  $\mathfrak{P}$ , bestehen aus den Elementen

$$\mathfrak{p}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k(\omega_k) \quad p \in \tilde{P}, S^\bullet(\mathbb{V}) \ni \omega = \sum_k \omega_k \text{ mit } \omega_k \in S^k(\mathbb{V}),$$

lokalkonvex topologisiert. Hierbei bezeichnet  $\tilde{P}$  das filtrierende System aller bezüglich  $\mathcal{T}_P$  stetigen Halbnormen und wegen der Submultiplikativität ist  $\vee$  stetig. Ist  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$  hausdorffsch, so bezeichnet  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), *)$  die lokalkonvexe Algebra mit submultiplikativem Halbnormensystem  $\hat{\mathfrak{P}}$ , die durch Vervollständigung von  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \vee)$  erhalten wird. In diesem Rahmen ist  $\mathcal{M}$  zudem als lokalkonvexer Vektorraum derart zu verstehen, dass die Modul-Multiplikationen stetig sind.

In jedem Fall verlangen wir, dass die Modul-Multiplikationen  $\mathbb{K}$ -bilinear sind und dass  $\mathcal{M}$  verträglich ist, dass also  $1 *_L m = m = m *_R 1$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  gilt.

*Die Resultate dieser Arbeit sind:*

- **Satz**

i.) Gegeben ein  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta).$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}).$$

ii.) Gegeben ein lokalkonvexer,  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta^c)$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}).$$

iii.) Gegeben ein vollständiger, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}).$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}).$$

Hierbei bezeichnet  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$  die total antisymmetrischen,  $\mathbb{K}$ -multilinearen Abbildungen von  $\mathbb{V}^k$  nach  $\mathcal{M}$  und  $\mathbb{V}^k$  das  $k$ -fache kartesische Produkt von  $\mathbb{V}$ . Mit  $(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$  ist der Kockettenkomplex mit Kettengliedern  $KC^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$  und Kettendifferentialen

$$(\Delta^k \phi)(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_R] \phi(v_1, \dots, \mathbf{\blacktriangle}^l, \dots, v_{k+1})$$

gemeint. Schließlich bezeichnet  $(KC_{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta^c)$  den stetigen Unterkomplex von  $(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$  mit Kettengliedern  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$ . Die Isomorphismen in Teil iii.) werden hierbei durch die Einschränkungs-Abbildungen  $\tau^k: \hat{\phi} \rightarrow \hat{\phi}|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k}$  induziert, die einen Kettenisomorphismus  $\tau$  zwischen dem Hochschild-Komplex von  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  und dem von  $S^\bullet(\mathbb{V})$  definieren. Die Isomorphie in Teil i.) ist abstrakter Natur, kann aber auch durch explizite Kettenabbildungen  $F$  und  $G$  oder genauer durch die aus ihnen durch Anwendung des  $\text{hom}_{\mathcal{A}^e}(\cdot, \mathcal{M})$ -Funktors<sup>5</sup> gewonnenen Kettenabbildungen  $F^*$  und  $G^*$  erhalten werden. Besagte  $F$  und  $G$  haben wir hierbei durch Abstraktion von solchen gewonnen<sup>6</sup>, die für den endlich-dimensionalen Fall existieren. Diese Kettenabbildungen induzieren nun auch die Isomorphismen in Teil ii.), wobei hier unter anderem deren Stetigkeit zu zeigen und explizite stetige Homotopieabbildungen  $s_k$  zu konstruieren waren.

- Eine weitergehende Analyse mit der Hilfe von  $F$  und  $G$  sowie der Homotopie  $s$ , liefert in den symmetrischen Fällen die folgenden unendlich-dimensionalen Verallgemeinerungen der klassischen Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme, die nun insbesondere für den physikalisch relevanteren Spezialfall  $\mathcal{M} = S^\bullet(\mathbb{V}), \text{Hol}(\mathbb{V})$  gelten.

### Satz (Hochschild-Kostant-Rosenberg)

<sup>5</sup> $\mathcal{A} = S^\bullet(\mathbb{V})$

<sup>6</sup>vgl. [BGH<sup>+</sup>03], [Con94, Sect. III.2 $\alpha$ ]

- i.) Gegeben ein symmetrischer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Dann besitzt jede Kohomologieklass  $[\eta] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  genau einen total antisymmetrischen Repräsentanten  $\phi_D^{a,\eta}$ . Dieser ist derivativ in jedem Argument und gegeben durch  $\phi_D^{a,\eta} = \text{Alt}_k(\phi)$  für beliebiges  $\phi \in [\eta]$  mit  $\phi_D^{a,0} = 0$  für die 0-Klasse  $[0]$ . Insgesamt gilt für alle  $\phi \in [\eta]$ :

$$\phi = \underbrace{\phi_D^{a,\eta}}_{\text{Alt}_k(\phi)} + \underbrace{\delta^{k-1}(\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi)}_{\phi - \text{Alt}_k(\phi)}.$$

- ii.) Gegeben ein symmetrischer, lokalkonvexer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Dann besitzt jedes  $[\eta_c] \in HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  genau einen total antisymmetrischen, stetigen Repräsentanten  $\phi_{c,D}^{a,\eta}$ . Dieser ist derivativ in jedem Argument und gegeben durch  $\phi_{c,D}^{a,\eta} = \text{Alt}_k(\phi_c)$  für beliebiges  $\phi_c \in [\eta_c]$  mit  $\phi_{c,D}^{a,0} = 0$  für die 0-Klasse  $[0_c]$ . Insgesamt gilt für alle  $\phi_c \in [\eta_c]$ :

$$\phi_c = \underbrace{\phi_{c,D}^{a,\eta}}_{\text{Alt}_k(\phi_c)} + \underbrace{\delta_c^{k-1}(\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c)}_{\phi_c - \text{Alt}_k(\phi_c)}.$$

- iii.) Gegeben ein vollständiger, symmetrischer, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Dann besitzt jedes  $[\hat{\eta}_c] \in HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  genau einen total antisymmetrischen, stetigen Repräsentanten  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}$ . Dieser ist derivativ in jedem Argument und gegeben durch  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta} = \text{Alt}_k(\hat{\phi}_c)$  für beliebiges  $\hat{\phi}_c \in [\hat{\eta}_c]$  mit  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,0} = 0$  für die 0-Klasse  $[\hat{0}_c]$ .

Insgesamt gilt für alle  $\hat{\phi}_c \in [\hat{\eta}_c]$ :

$$\hat{\phi}_c = \underbrace{\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}}_{\text{Alt}_k(\hat{\phi}_c)} + \underbrace{\widehat{\delta_c^{k-1}(\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c)}}_{\hat{\phi}_c - \text{Alt}_k(\hat{\phi}_c)} \quad \text{mit} \quad \phi_c = \hat{\phi}_c|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k}.$$

Hierbei ist  $\zeta$  ein sehr einfacher Kettenisomorphismus, zwischen dem Hochschild-Komplex und einem Hilfskomplex, in den auch  $G^*$  abbildet. Mit  $s_k^* = \text{hom}_{A^e} s_k$  ist der Pullback mit der rekursiv definierten Homotopieabbildung  $s_k$  gemeint. In Teil

iii.) bezeichnet  $\widehat{(\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c)}$  die stetige Fortsetzung von  $(\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c)$  und  $\phi_c = \hat{\phi}_c|_{S^\bullet(\mathbb{V})}$  die Einschränkung der stetigen Abbildung  $\hat{\phi}_c$  auf  $S^\bullet(\mathbb{V}) \subseteq \text{Hol}(\mathbb{V})$ . Eine genauere Analyse liefert für die erste Hochschild-Kohomologie

$$\begin{aligned} [\eta] &= \phi_D^{a,\eta} \quad \text{für alle} \quad [\eta] \in HH^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \\ [\eta_c] &= \phi_{c,D}^{a,\eta} \quad \text{für alle} \quad [\eta] \in HH_{\text{cont}}^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \\ [\hat{\eta}_c] &= \hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta} \quad \text{für alle} \quad [\hat{\eta}] \in HH_{\text{cont}}^1(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \end{aligned}$$

und für die zweite die explizite Formel

$$\begin{aligned}
(\zeta_{-1}^1 s_1^* \zeta^2 \phi)(x) &= \phi(1, x) + \sum_{p=1}^l \left[ \frac{1}{p} \phi(x^p, x_p) + \dots \right. \\
&\quad + \binom{p}{l}^{-1} \sum_{j_1, \dots, j_l}^{p-1} \phi((x^p)^{j_1, \dots, j_l}, x_p) *_{\mathcal{R}} (x^p)_{j_1, \dots, j_l} + \dots \\
&\quad \left. + \frac{1}{p} \phi(1, x_p) *_{\mathcal{R}} x^p \right]
\end{aligned}$$

für alle  $x \in S^\bullet(\mathbb{V})$  mit  $\deg(x) = l$ . Analoge, wenn auch weniger konkrete Aussagen für den nichtsymmetrischen Fall sind

$$\begin{aligned}
\phi &= \overbrace{\zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi}^{= \tilde{\phi} \in [\eta]} + \left( \phi - \zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi \right) = \tilde{\phi} + \delta^{k-1} (\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi), \\
\phi_c &= \overbrace{\zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi_c}^{= \tilde{\phi}_c \in [\eta_c]} + \left( \phi_c - \zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi_c \right) = \tilde{\phi}_c + \delta_c^{k-1} (\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c)
\end{aligned}$$

für  $\phi \in [\eta] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ ,  $\phi_c \in [\eta_c] \in HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und  $\hat{\phi}_c \in [\hat{\eta}_c] \in HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  sowie

$$\hat{\phi}_c = \overbrace{\left( \zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi_c \right)}^{\in [\hat{\eta}_c]} + \widehat{\delta_c^{k-1} \left( \zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c \right)} \quad \text{mit} \quad [\hat{\eta}_c] \ni \phi_c = \hat{\phi}_c|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k}$$

und  $\Omega_k = F_k \circ G_k$ . Hierfür beachte man, dass wir in obiger Formel für  $\zeta_{-1}^1 s_1^* \zeta^2 \phi$  explizit zwischen  $*_{\mathcal{R}}$  und  $*_{\mathcal{L}}$  unterschieden haben, diese also auch für nicht-symmetrischen Fall gültig ist. Besagte Formel lässt sich dann in der Situation der Deformation einer Modul-Struktur zur rekursiven Konstruktion nutzbringend einsetzen, sofern die zweite Hochschild-Kohomologie  $HH^2(\mathcal{A}, \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}))$  verschwindet. Die Bezeichnungsweise „Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme“ ist hierbei auch insofern gerechtfertigt als dass jedes, in allen Argumenten derivative  $\phi \in HC^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , die algebraische Definition eines Differentialoperators erster Ordnung erfüllt, also  $\phi_D^{a, \eta} \in \text{DiffOp}_k^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  gilt. Weiterhin ist jedes derartige Element  $\phi \in HC_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  ein stetiger Differentialoperator erster Ordnung und ebenso verhält es sich mit solchen Elementen aus  $HC_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . In diesem Sinne nehmen die Repräsentanten  $\phi_D^{a, \eta}$  den Platz ein, der den Multi-Vektorfelder im endlich-dimensionalen Rahmen gebührt, vgl. [Wal07, Prop 6.2.8].

- Motiviert durch den Fakt, dass  $G^*$  in beiden Fällen eine Kettenabbildung

$$\begin{aligned}
\xi: (KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta) &\longrightarrow (HC(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta) && \text{bzw.} \\
\xi: (KC_{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta^c) &\longrightarrow (HC_{\text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_c)
\end{aligned}$$

definiert, die Isomorphismen  $\tilde{\xi}^k$  auf Kohomologie-Niveau induziert und zudem differentielle Bilder hat, sind wir der Frage nachgegangen, ob sich mit dieser auch die Hochschild-Kohomologien der differentiellen und der stetig-differentiellen Unterkomplexe  $(HC_{\text{diff}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{\text{diff}})$  und  $(HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{c,d})$  berechnen lassen. Diese sind zunächst nur im Falle symmetrischer Bimoduln wohldefiniert, für den wir folgendes Korollar erhielten:

**Korollar**

- i.) Sei  $\mathcal{M}$  ein symmetrischer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  Kettenabbildungen  $\tilde{\xi}^k$  und  $\hat{\xi}^k$  zwischen  $(HC_{\text{diff}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{\text{diff}})$  und  $(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Des Weiteren ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\hat{\xi}^k$  surjektiv.
- ii.) Sei  $\mathcal{M}$  ein symmetrischer, lokalkonvexer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  Kettenabbildungen zwischen  $(HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{c,d})$  und  $(KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Des Weiteren ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\hat{\xi}^k$  surjektiv.
- iii.) Gegeben ein vollständiger, symmetrischer, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , so induzieren die Einschränkungs-Abbildungen einen Kettenisomorphismus:

$$(HC_{c,d}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \hat{\delta}_{c,d}) \cong (HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{c,d})$$

und es gilt die Isomorphie:

$$HH_{c,d}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong HH_{c,d}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}).$$

Hierbei bezeichnet  $\hat{\xi}$  die mit Hilfe von  $F^*$  definierte Kettenabbildung, welche im nicht-differentiellen Falle die auf Kohomologie-Niveau zu  $\tilde{\xi}^k$  inversen Isomorphismen  $\tilde{\hat{\xi}}^k$  induziert. Eine analoge Aussage ist auch für die sogenannten differentiellen  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimoduln  $k$ -ter Ordnung herleitbar, deren Rechtsmodul-Multiplikation in der Form

$$*_R = *_L + D_1 + \dots + D_k$$

mit  $\mathbb{K}$ -bilinearen Abbildungen  $D_l : S^\bullet(\mathbb{V}) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  derart geschrieben werden kann, dass zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt sind:

- a.) Jedes  $D_l$  ist  $*_L$ -linear im zweiten Argument.
- b.) Für  $D_{l_1, \dots, l_p}^{a_1, \dots, a_p} = D_{l_1}^{a_1} \circ \dots \circ D_{l_p}^{a_p}$  mit  $D_l^a(m) := D_l(a, m)$  und  $a \in S^\bullet(\mathbb{V})$  ist  $D_{l_1, \dots, l_p}^{a_1, \dots, a_p} = 0$ , falls  $\sum_{i=1}^p l_i > k$ .
- c.) Für alle  $1 \leq l \leq k$  gilt:

$$\begin{aligned} D_l(a * b, m) &= b *_L D_l(a, m) + D_1(b, D_{l-1}(a, m)) + D_2(b, D_{l-2}(a, m)) + \dots \\ &\quad + D_{l-2}(b, D_2(a, m)) + D_{l-1}(b, D_1(a, m)) + a *_L D_l(b, m). \end{aligned}$$

- d.) Für jedes  $m \in \mathcal{M}$  ist  $D_l(\cdot, m) \in \text{DiffOp}_1^l(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  sowie  $D_l(v, m) = 0$ , falls  $l \geq 2$  und  $\deg(v) = 1$ .

Für derartige Bimoduln sind die differentiellen Unterkomplexe ebenfalls wohldefiniert und es gilt folgender Satz:

**Satz**

- i.) Sei  $\mathcal{M}$  ein differentieller  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann besitzt jede Kohomologieklassse  $[\eta] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  mindestens einen differentiellen Repräsentanten  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{s+1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Des Weiteren induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  Kettenabbildungen zwischen  $(HC_{\text{diff}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{\text{diff}})$  und  $(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Hierbei ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\tilde{\xi}^k$  surjektiv.
- ii.) Sei  $\mathcal{M}$  ein differentieller, lokalkonvexer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann besitzt jede Kohomologieklassse  $[\eta] \in HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  mindestens einen differentiellen Repräsentanten  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{s+1, \text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Des Weiteren induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  wohldefinierte Kettenabbildungen zwischen  $(HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{c,d})$  und  $(KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Hierbei ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\tilde{\xi}^k$  surjektiv.

Ein Beispiel für einen solchen Bimodul ist hierbei der Unterraum  $\mathcal{M}$  aller Differentialoperatoren  $m \in \text{DiffOp}_1^s(S^\bullet(\mathbb{V}), S^\bullet(\mathbb{V}))$ , die als eine endliche Summe der Form

$$m = \sum_{l=0}^s \sum_{|\alpha|=l} \delta_{\alpha_1}^{|\alpha_1|} \dots \delta_{\alpha_k}^{|\alpha_k|}$$

mit Derivationen  $\delta_{\alpha_i} \in \text{DiffOp}_1^1(S^\bullet(\mathbb{V}), S^\bullet(\mathbb{V}))$  geschrieben werden können. Hierbei ist in der zweiten Summe  $\alpha \in \mathbb{N}^k$ , wobei  $k$  für jeden Summanden variieren darf. Mit  $\delta_{\alpha_i}^{|\alpha_i|}$  ist die  $|\alpha_i|$ -fache Anwendung von  $\delta_{\alpha_i}$  gemeint, und wegen der Derivationseigenschaft ist die Reihenfolge Verkettungen unwichtig. Der Summand für  $l = 0$  soll dann lediglich aus einem Element  $m_0 \in S^\bullet(\mathbb{V})$  bestehen.

Obiger Satz und obiges Korollar stellen nun die unendlich-dimensionalen Verallgemeinerungen der in [Wei09, Kapitel 5] behandelten Zusammenhänge dar, in welchen es sogar möglich ist, die Isomorphie besagter Kohomologiegruppen für die Algebra  $C^\infty(V)$  mit einer konvexen Teilmengen  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  zu zeigen. Dies ist im wesentlichen dem Fakt geschuldet, dass die Differentialoperatoren hier besonders einfach mit Hilfe partieller Ableitungen geschrieben werden können. Es gelten dann Kettenregeln der Form  $\partial_y f(tx + (1-t)y) = f'(tx + (1-t)y)(1-t)$ , womit die Homotopie  $s$  bzw.  $s^*$  auch im differentiellen Fall gewinnbringend eingesetzt werden kann, siehe [Wei09, Prop 5.6.6]. In unserem unendlich-dimensionalen Rahmen bleibt jedoch zu hoffen, dass eine andere Homotopie als  $s^*$  existiert, die letztlich die Surjektivität von  $\tilde{\xi}^k$  und die Injektivität von  $\tilde{\xi}^k$  zeigt.

## Aufbau

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- In Kapitel 1 definieren wir den zentralen Begriff der Hochschild-Kohomologie ganz allgemein für Hochschild-Koketten mit Werten in Bimoduln und verwenden die im Anhang A bereitgestellten Grundlagen, um besagte Kohomologiegruppen exemplarisch für die Polynom-Algebra  $\text{Pol}(\mathbb{R}^n)$  zu berechnen. Hierbei bedienen wir uns den Methoden aus [Wei09, Kapitel 5]. Durch Abstraktion der hier benutzten Homotopien und Kettenabbildungen sind wir schließlich in der Lage, die Hochschild-Kohomologien für die symmetrische Algebra eines beliebigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes  $\mathbb{V}$  zu bestimmen.
- Im 2. Kapitel führen wir den Begriff des topologischen Komplexes und den der stetigen Hochschild-Kohomologie ein. Aufbauend auf Kapitel 1 und mit Hilfe der in Anhang B bereitgestellten funktional-analytischen Mittel werden die stetigen Hochschild-Kohomologien der geeignet topologisierten symmetrischen Algebra unter expliziter Verwendung der im vorherigen Kapitel definierten Kettenabbildungen für beliebige lokalkonvexe Vektorräume  $(\mathbb{V}, P)$  sowie lokalkonvexe Bimoduln berechnet.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels betrachten wir speziell lokalkonvexe Vektorräume  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$  mit hausdorffschen Topologien. In diesem Fall ist die symmetrische Algebra ebenfalls hausdorffsch topologisiert und wir dürfen deren Vervollständigung  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), \hat{\mathfrak{P}})$  betrachten. Wir geben hier zunächst eine detaillierte Beschreibung dieses Raumes und mit Dichtheitsargumenten werden wir in der Lage sein, auch die Hochschild-Kohomologie dieser Algebra für hausdorffsche und zudem vollständige  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimoduln zu charakterisieren. Ein essentielles Beispiel für einen solchen Bimodul wird dann immer  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  selbst darstellen.

- Das 3. Kapitel ist ganz der Verallgemeinerung der Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme auf den unendlich-dimensionalen Fall gewidmet, welche wir für symmetrische  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimoduln sowohl im rein algebraischen als auch im lokalkonvexen Fall und für symmetrische lokalkonvexe  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimoduln formulieren werden.
- Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem algebraischen Konzept des Multidifferentialoperators und gehen der Frage nach, für welche  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ - bzw.  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimoduln es möglich ist, den Begriff des Hochschild-Komplexes zu definieren und dessen Kohomologien mit Hilfe der uns zur Verfügung stehenden Mittel zu berechnen.



# 1. Hochschild-Kohomologien

In diesem Kapitel geben wir die zentrale Definition dieser Arbeit, die der Hochschild-Kohomologie und berechnen diese exemplarisch für die Polynomalgebra  $\text{Pol}(\mathbb{R}^n)$ , sowie als Verallgemeinerung für die symmetrische Algebra über einem beliebigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$ . Dabei wollen wir hier und für den Rest dieser Arbeit  $\mathbb{K}$  immer als  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  annehmen. Unter einer  $\mathbb{K}$ -Algebra  $\mathcal{A}$  verstehen wir im Folgenden einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{A}$  mit assoziativer,  $\mathbb{K}$ -bilinearier Algebrenmultiplikation. Sprechen wir von einem  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , so ist stets ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodulstruktur derart gemeint, dass sowohl die Linksmodul-Multiplikation  $*_L$  als auch die Rechtsmodul-Multiplikation  $*_R$   $\mathbb{K}$ -bilineare Abbildungen sind. Ist  $\mathcal{A}$  unitär, so setzen wir immer die Verträglichkeit von  $\mathcal{M}$ , also  $1_{\mathcal{A}} *_L m = m$  und  $m *_R 1_{\mathcal{A}} = m$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  voraus. Der Verständlichkeit halber werden wir jedoch die an gegebener Stelle wichtigen Eigenschaften nochmals explizit erwähnen. Alle im Folgenden auftretenden Tensorprodukte sind als solche über dem jeweils verwendeten Körper  $\mathbb{K}$  zu verstehen.

## 1.1. Einführung

Gegeben eine  $\mathbb{K}$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und ein  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , so betrachten wir für  $k \in \mathbb{Z}$  die  $\mathbb{K}$ -Vektorräume

$$HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \{0\} & k < 0 \\ \mathcal{M} & k = 0 \\ \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\underbrace{\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{k\text{-mal}}, \mathcal{M}) & k \geq 1, \end{cases}$$

die  $\mathbb{K}$ -multilinearen Abbildungen von  $\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$  nach  $\mathcal{M}$ . Vermöge der gegebenen Links- und Rechtsmodulstruktur definieren wir  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen

$$\delta^k: HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \longrightarrow HC^{k+1}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

durch

$$\begin{aligned} (\delta^k \phi)(a_1, \dots, a_{k+1}) &= a_1 *_L \phi(a_2, \dots, a_{k+1}) + \sum_{i=1}^k (-1)^i \phi(a_1, \dots, a_i *_L a_{i+1}, \dots, a_{k+1}) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \phi(a_1, \dots, a_k) *_R a_{k+1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eine elementare Rechnung zeigt  $\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$ , und wir erhalten einen Kokettenkomplex  $(HC^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}), \delta)$  mit  $HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  als  $\mathbb{K}$ -Moduln und  $\delta^k$  als  $\mathbb{K}$ -Homomorphismen.

Wir kommen nun zu der für diese Arbeit zentralen Definition.

**Definition 1.1.1 (Hochschild-Kohomologie)**

Wir definieren die  $k$ -te Hochschild-Kohomologie durch:

$$HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \ker(\delta^0) & k = 0 \\ HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \ker(\delta^k) / \operatorname{im}(\delta^{k-1}) & k \geq 1. \end{cases}$$

Ungeachtet ihrer  $\mathbb{K}$ -Vektorraum Struktur wollen wir diese im Folgenden entweder als Kohomologiegruppen oder einfach als Kohomologien bezeichnen.

Vermöge der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes erhalten wir einen Isomorphismus

$$\otimes_{k*} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}, \mathcal{M}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}, \mathcal{M}),$$

dessen Inverses  $\otimes_k^* = \otimes_{k*}^{-1}$  einfach der Pullback mit  $\otimes_k$  ist. Die Tensorvariante von (1.1) ist dann gegeben durch lineare Fortsetzung von

$$\begin{aligned} (\delta^k \phi)(a_1 \otimes \dots \otimes a_k) &= a_1 *_L \phi(a_2 \otimes \dots \otimes a_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (-1)^i \phi(a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{k+1}) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \phi(a_1 \otimes \dots \otimes a_k) *_R a_{k+1} \end{aligned}$$

vermöge Korollar B.3.5 und wir erhalten

$$\delta_{\otimes}^k \circ \otimes_{k*} = \otimes_{k+1*} \circ \delta_{\times}^k, \quad (1.2)$$

womit  $\otimes_*$  ein Kettenisomorphismus zwischen diesen beiden Kokettenkomplexen ist. Dies bedeutet insbesondere die Isomorphie derer Kohomologien (vgl. Lemma A.2.5 ii.)), und wir dürfen uns im Folgenden darauf beschränken, die einfacher handhabbare Tensorvariante des Hochschild-Komplexes zu betrachten.

Wir wollen nun zunächst einsehen, dass die Kohomologiegruppen  $HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  durch Anwendung eines Ext-Funktors auf die Algebra  $\mathcal{A}$  erhalten werden können, dass also

$$HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong \operatorname{Ext}_R^k(\cdot, \mathcal{M})(\mathcal{A}) = H^k(\operatorname{hom}_R(\cdot, \mathcal{M})C) = H^k(\operatorname{Hom}_R(C, \mathcal{M}), d^*)$$

gilt. Dabei bezeichnet  $C$  eine projektive Auflösung  $(C, d, \epsilon)$  von  $\mathcal{A}$  und  $R$  einen geschickt zu wählenden Ring. Mit Beispiel A.2.20 folgt dann bereits  $HH^0(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong \operatorname{Hom}_R(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .

**Lemma 1.1.2**

Gegeben eine assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra  $(\mathcal{A}, *)$ .

i.) Die Menge  $\mathcal{A}^e = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$  wird vermöge der Multiplikation

$$(a \otimes b) *_e (\tilde{a} \otimes \tilde{b}) := (a * \tilde{a}) \otimes (b *^{opp} \tilde{b}) = (a * \tilde{a}) \otimes (\tilde{b} * b) \quad (1.3)$$

zu einer assoziativen  $\mathbb{K}$ -Algebra. Ist  $\mathcal{A}$  unitär, so auch  $\mathcal{A}^e$  vermöge  $1_{\mathcal{A}^e} = 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}$ .

ii.) Jeder  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$  wird durch

$$a \otimes b *_e m = a *_L (m *_R b) = (a *_L m) *_R b \quad \forall a \otimes b \in \mathcal{A}^e, m \in \mathcal{M}$$

zu einem  $\mathcal{A}^e$ -Linksmodul.

BEWEIS: i.) Die Assoziativität folgt unmittelbar aus der Assoziativität von  $\mathcal{A}$ . Der Rest ist ebenfalls klar. Für die Wohldefiniertheit von  $*_e$  definieren wir die Abbildung  $*'_e$  vermöge Korollar B.3.5 durch lineare Fortsetzung von

$$\begin{aligned} *'_e: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ a \otimes b \otimes \tilde{a} \otimes \tilde{b} &\longmapsto a\tilde{a} \otimes b\tilde{b} \end{aligned}$$

und setzen  $*_e = *'_e \circ \cong \circ \otimes_2$  mit  $\otimes_2: \mathcal{A}^e \times \mathcal{A}^e \longrightarrow \mathcal{A}^e \otimes \mathcal{A}^e$  und  $\cong$  der Isomorphismus  $\mathcal{A}^e \otimes \mathcal{A}^e \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ .

ii.) Für die Wohldefiniertheit beachte man, dass für festes  $m \in \mathcal{M}$  die Abbildung  $*_m: a \otimes b \rightarrow amb$  die Bedingungen von Korollar B.3.5 erfüllt, mithin linear auf ganz  $\mathcal{A}^e$  fortsetzt. Mit i.) folgt

$$[(a \otimes b) *_e (\tilde{a} \otimes \tilde{b})] *_e m = a\tilde{a}m\tilde{b}b = (a \otimes b) *_e (\tilde{a}m\tilde{b}) = (a \otimes b) *_e [(\tilde{a} \otimes \tilde{b}) *_e m],$$

was die Behauptung zeigt. ■

### Definition 1.1.3 (Bar-Komplex)

Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra. Wir betrachten die  $\mathbb{K}$ -Vektorräume

$$X_k = \mathcal{A} \otimes \underbrace{\mathcal{A} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}}_{k\text{-mal}} \otimes \mathcal{A}$$

$$X_0 = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad X_1 = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad X_2 = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A},$$

die wie in Lemma 1.1.2 durch

$$a \otimes b *_e (x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes x_{k+1}) = (ax_0) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes (x_{k+1}b) \quad (1.4)$$

zu  $\mathcal{A}^e$ -Linksmoduln werden. Des Weiteren seien  $\mathcal{A}^e$ -Homomorphismen durch lineare Fortsetzung von

$$\begin{aligned} d_k: X_k &\longrightarrow X_{k-1} \\ (x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1}) &\longmapsto \sum_{j=0}^k (-1)^j x_0 \otimes \dots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1} \end{aligned}$$

für  $k \geq 1$  definiert. Dann gilt  $d_k \circ d_{k+1} = 0$  und wir erhalten einen wohldefinierten Kettenkomplex  $(X, d)$ , den wir im Folgenden als den zu  $\mathcal{A}$  gehörigen Bar-Komplex bezeichnen wollen.

Für unitäres  $\mathcal{A}$  ist  $\mathcal{A}^e$  unitär und Lemma A.2.17 besagt, dass es dann rein abstrakt eine projektive (sogar freie) Auflösung von  $\mathcal{A}$  als  $\mathcal{A}^e$ -Modul geben muss. Ein essentielles Beispiel liefert folgendes Lemma.

**Lemma 1.1.4 (Bar-Auflösung für unitäre  $\mathbb{K}$ -Algebren)**

Gegeben eine unitäre, assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra  $\mathcal{A}$ , so wird der Bar-Komplex vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned}\epsilon: X_0 &\longrightarrow \mathcal{A} \\ a \otimes b &\longmapsto ab\end{aligned}$$

zu einer projektiven Auflösung  $(X, d, \epsilon)$  von  $\mathcal{A}$ .

BEWEIS: Zunächst ist  $\epsilon$  ein wohldefinierter  $\mathcal{A}^e$ -Homomorphismus

$$\epsilon(a \otimes b *_e x_0 \otimes x_1) \stackrel{(1.4)}{=} \epsilon(ax_0 \otimes x_1 b) = ax_0 x_1 b \stackrel{(1.4)}{=} a \otimes b *_e x_0 x_1 = a \otimes b *_e \epsilon(x_0 \otimes x_1).$$

Des Weiteren ist  $\epsilon$  surjektiv, da  $\epsilon(1 \otimes a) = a \in \mathcal{A}$ , und es gilt zudem

$$(\epsilon \circ d_1)(x_0 \otimes x_1 \otimes x_2) = \epsilon(x_0 x_1 \otimes x_2 - x_0 \otimes x_1 x_2) = 0.$$

Für die Projektivität reicht es, die  $\mathcal{A}^e$ -Freiheit jedes  $X_k$  zu zeigen. Dafür beachte man, dass  $X_0 \cong \mathcal{A}^e$ ,  $X_1 \cong \mathcal{A}^e \otimes \mathcal{A}$ ,  $\dots$ ,  $X_k \cong \mathcal{A}^e \bigotimes^{k-2} \mathcal{A}$ , womit  $X_k \cong \mathcal{A}^e \otimes V_k$  für  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $V_k$ . Dann liefert die  $\mathcal{A}^e$ -lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_k: \mathcal{A}^e \otimes V_k &\longrightarrow (\mathcal{A}^e)^{\dim(V_k)} \\ a^e \otimes \vec{e}_\alpha &\longmapsto \bigoplus_\alpha a^e \quad \forall a^e \in \mathcal{A}^e\end{aligned}$$

mit  $\{\vec{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  eine Basis von  $V_k$ , einen Isomorphismus  $X_k \longrightarrow (\mathcal{A}^e)^{\dim(V_k)}$ .

Es bleibt die Exaktheit des Komplexes nachzuweisen. Hierfür betrachten wir die Kettenabbildungen

$$\begin{aligned}h_k: X_k &\longrightarrow X_{k+1} \\ x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1} &\longmapsto 1 \otimes x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \quad k \geq -1\end{aligned}$$

für welche wir erhalten, dass

$$\begin{aligned}\epsilon \circ h_{-1} &= \text{id}_\mathcal{A}, \\ d_1 \circ h_0 + h_{-1} \circ \epsilon &= \text{id}_{X_0}, \text{ sowie} \\ d_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ d_k &= \text{id}_{X_k} \text{ für } k \geq 1.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Hiermit folgt für  $\alpha \in \ker(d_k)$  und  $k \geq 1$ :

$$\alpha = (d_{k+1} \circ h_k)(\alpha) + (h_{k-1} \circ d_k)(\alpha) = (d_{k+1} \circ h_k)(\alpha) \in \text{im}(d_{k+1}),$$

analog für  $\alpha \in \ker(\epsilon)$ . Dies zeigt die Exaktheit. ■

**Proposition 1.1.5**

Gegeben eine unitäre, assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und ein  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Bezeichne  $(X, d, \epsilon)$  die Bar-Auflösung über  $\mathcal{A}$ . Dann gilt:

$$HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}^e}^k(\cdot, \mathcal{M})(\mathcal{A}) = H^k(\text{hom}_{\mathcal{A}^e}(\cdot, \mathcal{M}) X) = H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M}), d^*).$$

BEWEIS: Sowohl  $(HC^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}), \delta)$ , als auch der durch Anwendung von  $\text{hom}_{\mathcal{A}^e}$  auf  $(X, d)$  gewonnene Kokettenkomplex  $(X^*, d^*)$  mit Kokettengliedern  $X^k = X_k^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_k, \mathcal{M})$  und Ko-Differentialen  $d^k = d_{k+1}^*: X^k \rightarrow X^{k+1}$ , sind Komplexe von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \Xi^k: \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_k, \mathcal{M}) &\longrightarrow HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \\ \psi &\longmapsto \left( \tilde{\psi}: (x_1 \otimes \dots \otimes x_k) \mapsto \psi(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes 1) \right), \end{aligned}$$

erhalten wir aus der Verträglichkeit von  $\mathcal{M}$  sowie der Bilinearität der Modul-Multiplikationen:

$$\begin{aligned} \Xi^k(\psi)(\lambda x_1 \otimes \dots \otimes x_k) &= \psi(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes \lambda x_i \otimes \dots \otimes x_k \otimes 1) \\ &= \psi(\lambda 1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes 1) \\ &= \lambda 1 \otimes 1 *_e \psi(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes 1) \\ &= \lambda \psi(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes 1) \\ &= \lambda \Xi^k(\psi)(x_1 \otimes \dots \otimes x_k). \end{aligned}$$

Damit bilden die  $\Xi^k$  in der Tat in die behauptete Menge ab, und da

$$\Xi^k(\lambda\psi + \phi) = \lambda \Xi^k(\psi) + \Xi^k(\phi),$$

sind diese zudem  $\mathbb{K}$ -Homomorphismen. Nun folgt die Injektivität obiger Abbildung unmittelbar aus der  $\mathcal{A}^e$ -Linearität der Urbilder. Für die Surjektivität betrachten wir ein  $\tilde{\psi} \in HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und definieren  $\Xi_{-1}^k: HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_k, \mathcal{M})$  durch

$$\Xi_{-1}^k(\psi)(x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes x_{k+1}) = x_0 \otimes x_{k+1} *_e \psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_k),$$

womit  $\Xi^k \circ \Xi_{-1}^k = \text{id}_{HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})}$ , also die  $\Xi^k$  Isomorphismen sind. Nun folgt

$$\Xi^{k+1} d_{k+1}^* = \delta^k \Xi^k, \tag{1.6}$$

da

$$\begin{aligned} (\Xi^{k+1} \circ d_{k+1}^*)(\psi)(x_1 \otimes \dots \otimes x_{k+1}) &= (d_{k+1}^* \psi)(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \otimes 1) \\ &= \psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \otimes 1) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \psi(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1} \otimes 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{k+1} \psi(1 \otimes \dots \otimes x_{k+1}) \\
& = x_1 \psi(1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \otimes 1) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \psi(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1} \otimes 1) \\
& \quad + (-1)^{k+1} \psi(1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes 1) x_{k+1} \\
& = x_1 (\Xi^k \circ \psi) (x_2 \otimes \dots \otimes x_{k+1}) + \sum_{j=1}^k (-1)^j (\Xi^k \circ \psi) (x_1 \otimes \dots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1}) \\
& \quad + (-1)^{k+1} (\Xi^k \circ \psi) (x_1 \otimes \dots \otimes x_k) x_{k+1} \\
& = (\delta^k \circ \Xi^k) (\psi)(x_1 \otimes \dots \otimes x_{k+1}),
\end{aligned}$$

und mit der  $\mathbb{K}$ -Linearität der  $\Xi^k$  zeigt Lemma A.2.5 iii) die Isomorphismen-Eigenschaft der  $\widetilde{\Xi^k}$ . ■

## 1.2. Die Hochschild-Kohomologie der Algebra $\text{Pol}(\mathbb{R}^n)$

Wir wollen als erstes einfaches Beispiel die Hochschild-Kohomologie der  $\mathbb{R}$ -Algebra  $\mathcal{A} = \text{Pol}(\mathbb{R}^n)$ , der Polynome auf  $\mathbb{R}^n$ , berechnen. Diese ist sicher unitär und assoziativ und wir haben gemäß Lemma 1.1.4 und Proposition 1.1.5 bereits eine projektive Auflösung, deren Kohomologiegruppen zu den gesuchten Hochschild-Kohomologien isomorph sind. Als nächstes wollen wir uns eine weitere projektive Auflösung  $(C', d', \epsilon')$  von  $\mathcal{A}$  verschaffen und wissen bereits, dass dann:

$$H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M})) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}^e}^k(\cdot, \mathcal{M})(\mathcal{A}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(C', \mathcal{M})).$$

### Definition 1.2.1 (Koszul-Komplex)

Gegeben die Algebra  $\mathcal{A} = \text{Pol}(\mathbb{R}^n)$ , so definieren wir den Koszul-Komplex  $(\mathcal{K}, \partial)$  durch die  $\mathcal{A}^e$ -Moduln

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{A}^e \quad \text{sowie} \quad \mathcal{K}_k = \mathcal{A}^e \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}) \quad \forall k \geq 1$$

mit der offensichtlichen  $\mathcal{A}^e$ -Multiplikation im ersten Faktor. Dies bedeutet insbesondere  $\mathcal{K}_k = 0$  falls  $k > n$ . Für  $0 < k \leq n$  definieren wir die  $\mathcal{A}^e$ -Homomorphismen:

$$\begin{aligned}
\partial_k: \mathcal{K}_k & \longrightarrow \mathcal{K}_{k-1} \\
\omega & \longmapsto [(v, w)(x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto \omega(v, w)((v - w), x_1, \dots, x_{k-1})].
\end{aligned}$$

Es folgt unmittelbar  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ , und man beachte zudem, dass die  $\partial_k$  mit Hilfe der Einsetzabbildung  $i_a(v, \omega)(x_2, \dots, x_k) = \omega(v, x_2, \dots, x_k)$ :

$$\begin{aligned}
i_a: \mathbb{R}^n \times \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}) & \longrightarrow \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^{n*}) \\
(v, \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k) & \longmapsto \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \omega^l(v) \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^l \wedge \dots \wedge \omega^k
\end{aligned}$$

auch als  $\partial_k = \sum_{j=1}^n \xi^j i_a(\vec{e}_j, \cdot)$  mit  $\mathcal{A}^e \ni \xi^j = x^j \otimes 1 - 1 \otimes x^j$  geschrieben werden können.

**Lemma 1.2.2 (Koszul-Auflösung)**

Sei  $\mathcal{A} = \text{Pol}(\mathbb{R}^n)$ , so wird der Koszul-Komplex vermöge der Abbildung

$$\begin{aligned} \epsilon: \mathcal{K}_0 &\longrightarrow \mathcal{A} \\ a \otimes b &\longmapsto ab \end{aligned}$$

zu einer projektiven und sogar freien Auflösung  $(\mathcal{K}, \partial, \epsilon)$  von  $\text{Pol}(\mathbb{R}^n)$ .

BEWEIS: Wir hatten bereits gesehen, dass  $\epsilon$  ein surjektiver  $\mathcal{A}^e$ -Homomorphismus ist. Die Freiheit der  $\mathcal{K}_k$  folgt ebenso wie für die Bar-Auflösung, da die  $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$  ebenfalls Vektorräume  $V$  mit Basen sind. Für die Exaktheit definieren wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} h_{-1}: \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{K}_0 \\ p &\longmapsto [(v, w) \mapsto p(w)] \end{aligned}$$

und  $h_k: \mathcal{K}_k \longrightarrow \mathcal{K}_{k+1}$  für  $k \geq 0$ , durch:

$$\begin{aligned} h_k(\omega)(v, w) &= \sum_{j=1}^n e^j \wedge \int_0^1 dt t^k \frac{\partial \omega}{\partial v^j}(tv + (1-t)w, w) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k, j=1}^n \int_0^1 dt t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial v^j}(tv + (1-t)w, w) e^j \wedge e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \end{aligned}$$

wobei

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} \otimes e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \quad \text{und} \quad \omega_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{A}^e.$$

Zunächst überzeugt man sich, dass besagte Abbildungen in der Tat nach

$$\text{Pol}(\mathbb{R}^n) \otimes \text{Pol}(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}) = \text{Pol}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$$

abbilden, denn es ist ja jedes  $\frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial v^j}$  als Ableitung eines Polynoms nach den ersten Argumenten wieder ein Polynom auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Ebenso haben wir  $p(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \in \text{Pol}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  für  $p \in \text{Pol}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , und die Integration ist nichts weiter, als die  $\mathbb{R}$ -lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\int_0^1 dt t^k: t^l x^n \longmapsto \frac{1}{l+k+1} x^n.$$

Behändiges Rechnen unter Verwendung der Derivationseigenschaft

$$i_a(v)(\phi \wedge \psi) = i_a(v)(\phi) \wedge \psi + (-1)^{\deg(\phi)} \phi \wedge i_a(v)(\psi)$$

zeigt:

$$\begin{aligned} \epsilon \circ h_{-1} &= \text{id}_{\mathcal{A}}, \\ h_{-1} \circ \epsilon + \partial_1 \circ h_0 &= \text{id}_{\mathcal{K}_0} \quad \text{und} \\ h_{k-1} \circ \partial_k + \partial_{k+1} \circ h_k &= \text{id}_{\mathcal{K}_k} \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

mithin die Exaktheit von  $(\mathcal{K}, \partial, \epsilon)$ , vgl. [Wei09, Kapitel 5]. ■

Mit obigem Lemma erhalten wir nun umgehend folgenden Satz.

**Satz 1.2.3**

Sei  $\mathcal{A} = \text{Pol}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{M}$  ein  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul, dann gilt:

$$HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{X}, \mathcal{M}), d^*) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M}), \partial^*). \quad (1.7)$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n). \quad (1.8)$$

BEWEIS: (1.7) ist wegen  $H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}^e}^k(\cdot, \mathcal{M})(\mathcal{A}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M}))$  klar und für (1.8) betrachten wir den Komplex  $(\mathcal{K}^*, \partial^*)$ , der durch Anwendung des  $\text{hom}_{\mathcal{A}^e}(\cdot, \mathcal{M})$ -Funktors auf  $(\mathcal{K}, \partial)$  gewonnen wird. Seien weiter  $\phi \in \mathcal{K}_k^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$  und  $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} \omega_{i_1, \dots, i_{k+1}} \otimes e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{k+1}} \in \mathcal{K}_{k+1}$ .

Dann folgt für  $\partial_{k+1}^*: \mathcal{K}_k^* \rightarrow \mathcal{K}_{k+1}^*$ :

$$\begin{aligned} (\partial_{k+1}^* \phi)(\omega) &\stackrel{(A.9)}{=} (\phi \circ \partial_{k+1})(\omega) \\ &= \phi \left( \partial_{k+1} \left( \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} \omega_{i_1, \dots, i_k} \otimes u^{i_1} \wedge \dots \wedge u^{i_{k+1}} \right) \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} \phi \left( \sum_{j=1}^n \xi^j *_e \omega_{i_1, \dots, i_{k+1}} \otimes i_a(\vec{e}_j, u^{i_1} \wedge \dots \wedge u^{i_{k+1}}) \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} \sum_{j=1}^n \xi^j *_e \phi(\omega_{i_1, \dots, i_{k+1}} \otimes i_a(\vec{e}_j, u^{i_1} \wedge \dots \wedge u^{i_{k+1}})) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} \sum_{j=1}^n (x^j \otimes 1 - 1 \otimes x^j) *_e \phi(\omega_{i_1, \dots, i_{k+1}} i_a(\vec{e}_j, u^{i_1} \wedge \dots \wedge u^{i_{k+1}})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit wegen der Symmetrie von  $\mathcal{M}$ . Dies zeigt  $\ker(\partial_{k+1}^*) = \mathcal{K}_k^*$  und  $\text{im}(\partial_k^*) = 0$ , mithin  $H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{A})) = \ker(\partial_{k+1}^*) / \text{im}(\partial_k^*) = \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{A})$ .



Für die letzte Gleichheit in (1.8) erinnern wir, dass  $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})^* = \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  und erhalten für  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$ :

$$\begin{aligned}
 \phi(a^e \otimes \omega) &= a^e *_e \phi \left( 1^e \otimes \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \omega_{j_1, \dots, j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k} \right) \\
 &= a^e *_e \sum_{j_1, \dots, j_k}^n \omega_{j_1, \dots, j_k} \otimes 1 *_e \phi(1^e \otimes e^{j_1, \dots, j_k}) \\
 &= a^e *_e \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \omega_{j_1, \dots, j_k} \phi^{j_1, \dots, j_k} \\
 &= a^e *_e \left( \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \phi^{j_1, \dots, j_k} \otimes e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \right) (1^e \otimes \omega) \\
 &= \left( \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \phi^{j_1, \dots, j_k} \otimes e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \right) (a^e \otimes \omega),
 \end{aligned}$$

und mit der Endlichkeit der Summe in der Tat

$$\left( \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \phi^{j_1, \dots, j_k} \otimes e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k} \right) \in \mathcal{M} \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt wieder  $1 *_L m = m = m *_R 1$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  und die Bilinearität der Modul-Multiplikationen benutzt. Die letzten beiden Schritte folgen mit der Konvention

$$m \otimes \lambda (a^e \otimes \omega) := a^e *_e m \cdot \omega(\lambda) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n). \quad (1.9)$$

Umgekehrt ist klar, dass jedes Element aus  $\mathcal{M} \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  vermöge (1.9) ein Element in  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$  definiert. ■

Für  $M = \text{Pol}(\mathbb{R}^n)$  wurde dieser Satz ursprünglich von Hochschild, Kostant und Rosenberg bewiesen, siehe [HKR62]. Eine Behandlung des Falles  $\mathcal{M} = \mathcal{A} = C^\infty(M)$  findet man in [CGD80].

#### Bemerkung 1.2.4

Für einen expliziten Isomorphismus benötigen wir zunächst eine zu  $\mu = \text{id}_{\mathcal{A}^e}$  gehörige Kettenabbildung

$$G: (X, d) \rightarrow (\mathcal{K}, \partial) \quad (1.10)$$

oder

$$F: (\mathcal{K}, \partial) \rightarrow (X, d). \quad (1.11)$$

Nach dem Beweis von Lemma A.2.15 ii.) erhalten wir durch Anwenden des  $\text{hom}_{\mathcal{A}^e}(\cdot, \mathcal{M})$ -Funktors Abbildungen  $F_k^*$  und  $G_k^*$ , die Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 \widetilde{G}_k^*: H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M})) &\longrightarrow H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M})) \\
 \widetilde{F}_k^*: H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M})) &\longrightarrow H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M}))
 \end{aligned}$$

auf Kohomologie-Niveau induzieren. Nach selbigem Beweis sind  $\widetilde{F}_k^*$  und  $\widetilde{G}_k^*$  sogar zueinander invers. Die Verkettung  $\widetilde{\otimes}_k^* \circ \widetilde{\Xi}^k \circ \widetilde{G}_k^*$  ist dann der gewünschte Isomorphismus nach  $HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .

Explizite Kettenabbildungen sind beispielsweise gegeben durch [BGH<sup>+</sup>03]:

$$G_k: \bigotimes_{i=1}^{k+2} \text{Pol}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Pol}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$$

$$(G_k p)(v, w) = \sum_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k$$

$$\frac{\partial p}{\partial q_1 \dots \partial q_k}(v, t_1 v + (1 - t_1)w, \dots, t_k v + (1 - t_k)w, w)$$

mit  $\partial_{k+1} \circ G_{k+1} = G_k \circ d_{k+1}$ ,  $G_k = 0$  für  $k > n$  und  $G_0 = \text{id}_{\mathcal{A}^e}$ , sowie durch die Abbildung aus [Con94, Sect. III.2a]:

$$F_k: \text{Pol}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{k+2} \text{Pol}(\mathbb{R}^n)$$

$$\omega \longmapsto [(v, w)(x_1, \dots, x_k) \mapsto \omega(v, w)(x_1 - v, \dots, x_k - v)],$$

mit  $d_{k+1} \circ F_{k+1} = F_k \circ \partial_{k+1}$ ,  $F_k = 0$  für  $k > n$  und  $F_0 = \text{id}_{\mathcal{A}^e}$ .

Eine einfache Rechnung zeigt dann  $G_k \circ F_k = \text{id}_{\mathcal{K}_k}$ , also  $F_k^* \circ G_k^* = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})}$  und somit  $\widetilde{F}_k^* \circ \widetilde{G}_k^* = \text{id}_{H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}))}$ . Zusammen mit der Isomorphismus-Eigenschaft von  $\widetilde{F}_k^*$  und  $\widetilde{G}_k^*$  bestätigt dies  $\widetilde{G}_k^{*-1} = \widetilde{F}_k^*$ .

## 1.3. Die Hochschild-Kohomologie der Algebra $S^\bullet(\mathbb{V})$

### 1.3.1. Die symmetrische und die Graßmann Algebra

Als abstrakte Variante des Polynom-Begriffes betrachten wir für einen gegebenen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$ , die unitäre, assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \vee)$ . Dies ist der gradierte Vektorraum  $S^\bullet(\mathbb{V}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(\mathbb{V})$  mit Untervektorräumen  $S^k(\mathbb{V}) = \text{im}(\text{Sym}_k) \subseteq T^k(\mathbb{V})$  und  $S^0(\mathbb{V}) = \mathbb{K}$ . Hierbei bezeichnet  $\text{Sym}_k: T^k(\mathbb{V}) \longrightarrow T^k(\mathbb{V})$  die mit Korollar B.3.5 wohldefinierte lineare Fortsetzung von

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Die bis auf kanonische Isomorphie kommutative, assoziative Algebrenmultiplikation ist dabei definiert durch  $\vee = S \circ \otimes^\bullet$ . Hierbei bezeichnet  $S: T^\bullet(\mathbb{V}) \longrightarrow S^\bullet(\mathbb{V})$  die Abbildung:

$$S^\bullet(\mathbb{V}) \ni \sum_l \alpha_l \longmapsto \sum_l \text{Sym}_l(\alpha_l) \quad \text{mit} \quad \text{Sym}_{0/1} = \text{id}_{S^{0/1}(\mathbb{V})},$$

und  $\otimes^\bullet: S^\bullet(\mathbb{V}) \times S^\bullet(\mathbb{V}) \longrightarrow T^\bullet(\mathbb{V})$  ist gegeben durch

$$\otimes^\bullet: \left( \sum_l \alpha_l, \sum_m \beta_m \right) \longmapsto \sum_{l,m} \alpha_l \otimes \beta_m \quad \forall \alpha_l \in S^l(\mathbb{V}), \beta_m \in S^m(\mathbb{V}).$$

Hierbei haben wir stillschweigend Lemma B.3.3 ii.), also  $T^l(\mathbb{V}) \otimes T^m(\mathbb{V}) \cong T^{l+m}(\mathbb{V})$  benutzt. Weiter beachte man, dass  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{W} \cong \mathbb{W} \cong \mathbb{W} \otimes \mathbb{K}$  für beliebigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{W}$  gilt, da  $\mathbb{K}$  selbst ein eindimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist. Man setzt dann

$$\otimes^\bullet(\mathbb{k}, \alpha_l) = \left( \cong_{S^l(\mathbb{V})} \circ \otimes \right) (\mathbb{k}, \alpha_l) = \mathbb{k} \cdot \alpha_l \quad \forall \alpha_l \in S^l(\mathbb{V})$$

und erhält insbesondere  $1_{S^\bullet(\mathbb{V})} = 1_{\mathbb{K}}$  als Einselement. Obige Definition hat dabei den Vorteil, dass

$$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_l) \vee (\alpha_{l+1} \vee \dots \vee \alpha_k) = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_k$$

für  $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_k := \text{Sym}_k(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k)$  gilt. Analog definieren wir die Graßmann-

Algebra  $\Lambda^\bullet(\mathbb{V}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(\mathbb{V})$  mit  $\Lambda^k(\mathbb{V}) = \text{im}(\text{Alt}_k)$ , und  $\text{Alt}_k$  die lineare Fortsetzung

von  $u_1 \otimes \dots \otimes u_k \longmapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S^k} \text{sign}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)}$ . Mit  $A = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Alt}_k$  ist dann die

zugehörige Algebrenmultiplikation durch  $\wedge = A \circ \otimes^\bullet$  definiert. Wie für den symmetrischen Fall, folgt  $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_l) \wedge (\alpha_{l+1} \wedge \dots \wedge \alpha_k) = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$  mit  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k := \text{Alt}_k(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k)$ .

### 1.3.2. Bestimmung der Hochschild-Kohomologie von $S^\bullet(\mathbb{V})$

Mit der Unitarität von  $\mathcal{A} = S^\bullet(\mathbb{V})$  ist die Existenz einer Bar-Auflösung  $(X, d, \epsilon)$  von  $S^\bullet(\mathbb{V})$  gesichert, und es gilt die Isomorphie  $HH^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M}))$  für die von uns betrachteten  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Was wir nun noch benötigen, um die Hochschild-Kohomologie von  $S^\bullet(\mathbb{V})$  zu bestimmen, ist lediglich eine Koszul-Auflösung  $(\mathcal{K}, \partial, \epsilon)$  von  $S^\bullet(\mathbb{V})$ , da dann wieder

$$H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M})) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}^e}^k(\cdot, \mathcal{M})(\mathcal{A}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(C', \mathcal{M}))$$

gilt. Zu diesem Zwecke seien die  $\mathcal{K}_k$  wie in Abschnitt 1.2 gegeben durch  $\mathcal{A}^e$ -Moduln

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{A}^e \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_k = \mathcal{A}^e \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) \quad \text{für } k \geq 1$$

mit der bekannten  $\mathcal{A}^e$ -Multiplikation im ersten Faktor.

Für  $\alpha \in S^l(\mathbb{V})$  mit  $\alpha = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_l$  bezeichne im Folgenden  $\alpha^j \in S^{l-1}(\mathbb{V})$  das Element  $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_l$ , welches durch Weglassen von  $\alpha_j$  aus  $\alpha$  entsteht. Ebenso sei  $\alpha^{j_1, \dots, j_s} \in S^{l-s}(\mathbb{V})$  das Element, welches durch Weglassen der  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_l}$  aus  $\alpha$  hervorgeht. Ist  $\deg(\alpha) = l$ , so setzen wir  $\alpha^{1, \dots, l} = 1_{S^\bullet(\mathbb{V})}$ . Sinngemäß benutzen wir diese

Konventionen für die Elemente in  $\Lambda^k(\mathbb{V})$ .

**Definition 1.3.1**

Für obige  $\mathcal{A}^e$ -Moduln definieren wir Kettendifferentiale durch:

$$\begin{aligned}\partial_k: \mathcal{A}^e \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) &\longmapsto \mathcal{A}^e \otimes \Lambda^{k-1}(\mathbb{V}) \\ \omega &\longmapsto [\partial_1^k - \partial_2^k](\omega)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\partial_1^k: S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow S^{\bullet+1}(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^{k-1}(\mathbb{V}) \\ (\alpha \otimes \beta \otimes u) &\longmapsto \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (u_j \vee \alpha \otimes \beta \otimes u^j) \\ \partial_2^k: S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^{\bullet+1}(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^{k-1}(\mathbb{V}) \\ (\alpha \otimes \beta \otimes u) &\longmapsto \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (\alpha \otimes u_j \vee \beta \otimes u^j),\end{aligned}$$

wobei wir hier und im Folgenden  $\mathcal{A}^e \otimes \Lambda^0(\mathbb{V})$  mit  $\mathcal{A}^e$  identifizieren wollen.

**Bemerkung 1.3.2**

Die Wohldefiniertheit obiger Abbildungen folgt wieder mit Korollar B.3.5, da wir diese auch schreiben können, als

$$\begin{aligned}\partial_1^k &= (S \otimes \text{id} \otimes \text{id}) \circ \tilde{\partial}_1^k \Big|_{\mathcal{K}_k} \\ \partial_2^k &= (\text{id} \otimes S \otimes \text{id}) \circ \tilde{\partial}_2^k \Big|_{\mathcal{K}_k}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_1^k: T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow T^{\bullet+1}(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^{k-1}(\mathbb{V}) \\ \alpha \otimes \beta \otimes u &\longmapsto k (u_1 \otimes \alpha \otimes \beta \otimes u^1) \\ \tilde{\partial}_2^k: T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^{\bullet+1}(\mathbb{V}) \otimes T^{k-1}(\mathbb{V}) \\ \alpha \otimes \beta \otimes u &\longmapsto k (\alpha \otimes u_1 \otimes \beta \otimes u^1).\end{aligned}$$

Dabei liegt der Faktor  $k$  an unserer Konvention

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(k)}).$$

In der Tat erhalten wir für  $\alpha, \beta \in S^\bullet(\mathbb{V})$ :

$$\tilde{\partial}_1^k(\alpha \otimes \beta \otimes u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \tilde{\partial}_1^k(\alpha \otimes \beta \otimes u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(k)})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (u_{\sigma(1)} \otimes \alpha \otimes \beta \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)}) \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(1)=j}} \text{sign}(\sigma) (u_j \otimes \alpha \otimes \beta \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)}) \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \text{sign}(\sigma) (u_j \otimes \alpha \otimes \beta \otimes \sigma^* [u_1 \otimes \dots \otimes u_k]) \\
 &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (u_j \otimes \alpha \otimes \beta \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_k),
 \end{aligned}$$

wobei  $\sigma^* [u_1 \otimes \dots \otimes u_{k-1}] = u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k-1)}$  bedeutet. Symmetrisieren im ersten Argument liefert dann die gewünschte Gleichheit. Analog folgt die Behauptung für  $\tilde{\partial}_2^k$ .

Folgendes Lemma zeigt, dass  $(\mathcal{K}, \partial)$  ein Kettenkomplex ist.

**Lemma 1.3.3**

Es gilt  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ .

BEWEIS: Seien hierfür abkürzend

$$\begin{aligned}
 u *_L (\alpha \otimes \beta \otimes \omega) &= u \vee \alpha \otimes \beta \otimes \omega \quad \text{sowie} \\
 u *_R (\alpha \otimes \beta \otimes \omega) &= \alpha \otimes u \vee \beta \otimes \omega,
 \end{aligned}$$

dann folgt:

$$\begin{aligned}
 (\partial_{k-1} \circ \partial_k) (\alpha \otimes \beta \otimes u) &= \partial_{k-1} \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} [u_j *_L - u_j *_R] \alpha \otimes \beta \otimes u^j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i-1} [u_i *_L - u_i *_R] [u_j *_L - u_j *_R] \alpha \otimes \beta \otimes u^{i,j} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=j+1}^k (-1)^{i-2} [u_i *_L - u_i *_R] [u_j *_L - u_j *_R] \alpha \otimes \beta \otimes u^{j,i} \right] \\
 &= \sum_{j=2}^k \sum_{i < j} (-1)^{j+i} [u_i *_L - u_i *_R] [u_j *_L - u_j *_R] \alpha \otimes \beta \otimes u^{i,j} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i > j} \overbrace{(-1)^{j+i} [u_i *_L - u_i *_R] [u_j *_L - u_j *_R]}^{\tau_{i,j}} \alpha \otimes \beta \otimes u^{j,i} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

da  $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$  mit der Kommutativität von  $\vee$ , und somit

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i>j} \tau_{i,j} \alpha \otimes \beta \otimes u^{j,i} \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{i<j} \tau_{i,j} \alpha \otimes \beta \otimes u^{i,j} = \sum_{j=2}^k \sum_{i<j} \tau_{i,j} \alpha \otimes \beta \otimes u^{i,j}.$$

Dabei ist letzte Gleichheit rein kombinatorischer Natur. ■

Zusammen mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \epsilon: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \alpha \vee \beta \end{aligned}$$

wird  $(\mathcal{K}, \partial, \epsilon)$  zu einem projektiven Komplex über  $S^\bullet(\mathbb{V})$ , und es bleibt nun lediglich dessen Exaktheit nachzuweisen. Hierfür definieren wir die abstrakte Variante von (1.7) durch:

**Definition 1.3.4**

Sei

$$\begin{aligned} h_{-1}: \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{K}_0 \\ \alpha &\longmapsto 1 \otimes \alpha \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_k: S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^{k+1}(\mathbb{V}) \\ \mu &\longmapsto \int_0^1 dt t^k (i_t \circ \delta)(\mu), \end{aligned}$$

für  $k \geq 0$ . Hierbei haben wir die folgenden Abbildungen benutzt:

i.)  $i_t: S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) \longrightarrow [S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V})][t]$  definiert durch

$$\begin{aligned} i_t: (\alpha \otimes \beta \otimes u) &\longmapsto t^l (\alpha \otimes \beta \otimes u) + t^{l-1} (1-t) \sum_{j=1}^l (\alpha^j \otimes \alpha_j \vee \beta \otimes u) + \dots \\ &\quad + t^{l-s} (1-t)^s \sum_{j_1, \dots, j_s}^l (\alpha^{j_1, \dots, j_s} \otimes \alpha_{j_1, \dots, j_s} \vee \beta \otimes u) + \dots \\ &\quad + (1-t)^l (1 \otimes \alpha \vee \beta \otimes u) \end{aligned}$$

für  $\deg(\alpha) = l$  und  $i_t(1 \otimes \beta \otimes u) = (1 \otimes \beta \otimes u)$ . Hierbei ist mit  $\sum_{j_1, \dots, j_s}$  die Summe über alle  $j_1 \neq \dots \neq j_s$  gemeint. Das Bild unter  $i_t$  ist dann als Polynom in  $t$  mit Werten in  $S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V})$  zu verstehen.

ii.)

$$\begin{aligned} \delta: S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow S^{\bullet-1}(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^{k+1}(\mathbb{V}) \\ \alpha_l \otimes \beta \otimes u &\longmapsto \sum_{j=1}^l \alpha_l^j \otimes \beta \otimes (\alpha_l)_j \wedge u \end{aligned}$$

für  $\alpha_l \in S^l(\mathbb{V})$  und  $\delta(1 \otimes \beta \otimes u) = 0$ .

### Bemerkung 1.3.5

Obige Abbildungen sind wohldefiniert, da zum einen  $\delta = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes A) \circ \tilde{\delta}|_{\mathcal{K}_k}$  mit

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}: T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow T^{\bullet-1}(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^{k+1}(\mathbb{V}) \\ \alpha_l \otimes \beta \otimes u &\longmapsto l (\alpha_l^1 \otimes \beta \otimes (\alpha_l)_1 \otimes u), \end{aligned}$$

wobei der Faktor  $l$  der Konvention für  $v_1 \vee \dots \vee v_l = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(l)}$  geschuldet ist, und da zum anderen

$$i_t = (\text{id} \otimes S \otimes \text{id}) \circ \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^l \eta_t^{l,s} \right] \Big|_{\mathcal{K}_k}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_t^{l,s}: T^l(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) \\ \alpha_l \otimes \beta \otimes u &\longmapsto \binom{l}{s} t^{l-s} (1-t)^s \alpha_l^{1,\dots,s} \otimes (\alpha_l)_{1,\dots,s} \otimes \beta \otimes u, \end{aligned}$$

wobei  $\eta_t^{0,0}(1 \otimes \beta \otimes u) = (1 \otimes \beta \otimes u)$ .

In der Tat erhalten wir für  $\alpha_l \in S^l(\mathbb{V})$ ,  $\beta \in S^\bullet(\mathbb{V})$  und  $u \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ :

$$\begin{aligned} \eta_t^{l,s}(\alpha_l \otimes \beta \otimes u) &= \frac{1}{s!(l-s)!} t^{l-s} (1-t)^s \sum_{\sigma \in S_l} (\alpha_l)_{\sigma(s+1)} \otimes \dots \otimes (\alpha_l)_{\sigma(l)} \otimes \\ &\quad (\alpha_l)_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes (\alpha_l)_{\sigma(s)} \otimes \beta \otimes u \\ &= t^{l-s} (1-t)^s \sum_{j_1, \dots, j_s}^l \alpha_l^{j_1, \dots, j_l} \otimes (\alpha_l)_{j_1, \dots, j_l} \otimes \beta \otimes u. \end{aligned}$$

Um nun die gewünschte Homotopieeigenschaft für von  $h$  nachzuweisen, benötigen wir zunächst einige Rechenregeln. Sei hierfür  $\cdot$  die  $\mathbb{K}$ -bilineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \cdot: \mathcal{A}^e \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) \times \mathcal{A}^e \otimes \Lambda^{k'}(\mathbb{V}) &\longrightarrow \mathcal{A}^e \otimes \Lambda^{k+k'}(\mathbb{V}) \\ ((\alpha \otimes \beta \otimes u), (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u})) &\longmapsto (\alpha \vee \tilde{\alpha} \otimes \beta \vee \tilde{\beta} \otimes u \wedge \tilde{u}) \end{aligned}$$

und  $\partial$  die Abbildung, die durch die  $\partial_k$  auf ganz  $S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V})$ , vermöge der Konvention  $\partial|_{\mathcal{A}^e \otimes \Lambda^0(\mathbb{V})} = 0$ , induziert wird.

**Lemma 1.3.6**

i.)

$$\begin{aligned} \delta((\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u})) &= \delta(\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}) \\ &\quad + (-1)^{\deg(u)} (\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot \delta(\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}); \end{aligned}$$

ii.)

$$\begin{aligned} \partial((\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u})) &= \partial(\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}) \\ &\quad + (-1)^{\deg(u)} (\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot \partial(\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}); \end{aligned}$$

iii.)

$$i_t(\mu \cdot \nu) = i_t(\mu) \cdot i_t(\nu) \quad \forall \mu, \nu \in S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V});$$

iv.)

$$\frac{d}{dt} i_t(\alpha \otimes \beta \otimes 1) = (\partial_1 \circ i_t \circ \delta)(\alpha \otimes \beta \otimes 1).$$

**BEWEIS:** i.) Wir erhalten mit  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg(\alpha) \deg(\beta)} \beta \wedge \alpha$  sowie der Assoziativität von  $\wedge$ :

$$\begin{aligned} &\delta(\alpha \vee \tilde{\alpha} \otimes \beta \vee \tilde{\beta} \otimes u \wedge \tilde{u}) \\ &= \sum_{j=1}^l (\alpha^j \vee \tilde{\alpha} \otimes \beta \vee \tilde{\beta} \otimes \alpha_j \wedge u \wedge \tilde{u}) + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} (\alpha \vee \tilde{\alpha}^j \otimes \beta \vee \tilde{\beta} \otimes \tilde{\alpha}_j \wedge u \wedge \tilde{u}) \\ &= \sum_{j=1}^l (\alpha^j \otimes \beta \otimes \alpha_j \wedge u) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}) + (-1)^{\deg(u)} (\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot \sum_{j=1}^{\tilde{l}} (\tilde{\alpha}^j \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{\alpha}_j \wedge \tilde{u}) \\ &= \delta(\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}) + (-1)^{\deg(u)} (\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot \delta(\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}). \end{aligned}$$



ii.) Sei  $\deg(u) = k$  und  $\deg(\tilde{u}) = \tilde{k}$ , dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \partial_{k+\tilde{k}}^1(\alpha \vee \tilde{\alpha} \otimes \beta \vee \tilde{\beta} \otimes u \wedge \tilde{u}) &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (u_j \vee \alpha \vee \tilde{\alpha} \otimes \beta \vee \tilde{\beta} \otimes u^j \wedge \tilde{u}) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\tilde{k}} (-1)^{j+k-1} (u_j \vee \alpha \vee \tilde{\alpha} \otimes \beta \vee \tilde{\beta} \otimes u \wedge \tilde{u}^j) \\
 &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (u_j \vee \alpha \otimes \beta \otimes u^j) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}) \\
 &\quad + (-1)^{[k=\deg(u)]} (\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot \sum_{j=1}^{\tilde{k}} (-1)^{j-1} (\tilde{u}_j \vee \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}^j) \\
 &= \partial_k^1(\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot (\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}) \\
 &\quad + (-1)^{\deg(u)} (\alpha \otimes \beta \otimes u) \cdot \partial_{\tilde{k}}^1(\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{u}).
 \end{aligned}$$

Analog folgt dies für  $\partial_{k+\tilde{k}'}^2$ , was die Behauptung zeigt.

iii.) Dies folgt unmittelbar daraus, dass jeder Summand aus  $i_t(\mu \cdot \nu)$  eindeutig als Produkt zweier Summanden aus  $i_t(\mu)$  und  $i_t(\nu)$  geschrieben werden kann.

iv.) Zunächst reicht es, die Aussage für Elemente  $\alpha \otimes 1 \otimes 1$  zu zeigen, da man auf beiden Seiten der zu zeigenden Gleichung  $1 \otimes \beta \otimes 1$  herausziehen kann. Es folgt

$$\frac{d}{dt} i_t(1 \otimes 1 \otimes 1) = \frac{d}{dt} (1 \otimes 1 \otimes 1) = 0 = (\partial_1 \circ i_t \circ \delta)(1 \otimes 1 \otimes 1)$$

und weiter für  $\deg(v) = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} i_t(v \otimes 1 \otimes 1) &= \frac{d}{dt} [t(v \otimes 1 \otimes 1) + (1-t)(1 \otimes v \otimes 1)] = (v \otimes 1 \otimes 1) - (1 \otimes v \otimes 1) \\
 &= \partial_1(1 \otimes 1 \otimes v) = (\partial_1 \circ i_t \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes v) \\
 &= (\partial_1 \circ i_t \circ \delta)(v \otimes 1 \otimes 1).
 \end{aligned}$$

Angenommen, obige Aussage gelte für  $\deg(\alpha) = k$ , dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} i_t(v \vee \alpha \otimes 1 \otimes 1) &= \frac{d}{dt} [i_t(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot i_t(\alpha \otimes 1 \otimes 1)] \\
 &= \frac{d}{dt} i_t(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot i_t(\alpha \otimes 1 \otimes 1) + i_t(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot \frac{d}{dt} i_t(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \\
 &= (\partial_1 \circ i_t \circ \delta)(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot i_t(\alpha \otimes 1 \otimes 1) + i_t(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\partial_1 \circ i_t \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \\
 &= \partial_1 [(i_t \circ \delta)(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot i_t(\alpha \otimes 1 \otimes 1) + i_t(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_t \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes 1)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\partial_1 \circ i_t) \left[ \delta(v \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\alpha \otimes 1 \otimes 1) + (v \otimes 1 \otimes 1) \cdot \delta(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \right] \\
 &= (\partial_1 \circ i_t \circ \delta \otimes 1) \left[ (v \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \right] \\
 &= (\partial_1 \circ i_t \circ \delta \otimes 1)(v \vee \alpha \otimes 1 \otimes 1).
 \end{aligned}$$

■

Folgende Proposition liefert schließlich die Exaktheit von  $(\mathcal{K}, \partial, \epsilon)$ .

**Proposition 1.3.7**

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \epsilon \circ h_{-1} &= \text{id}_{\mathcal{A}}, \\
 h_{-1} \circ \epsilon + \partial_1 \circ h_0 &= \text{id}_{\mathcal{K}_0} \quad \text{und} \\
 h_{k-1} \circ \partial_k + \partial_{k+1} \circ h_k &= \text{id}_{\mathcal{K}_k} \quad \text{für } k \geq 1.
 \end{aligned}$$

BEWEIS: Zunächst folgt

$$(\epsilon \circ h_{-1})(\alpha) = \epsilon(1 \otimes \alpha) = \alpha,$$

sowie mit Lemma 1.3.6 *iv.*):

$$\begin{aligned}
 (h_{-1} \circ \epsilon + \partial_1 \circ h_0)(\alpha \otimes \beta) &= 1 \otimes \alpha \vee \beta + \int_0^1 dt (\partial_1 \circ i_t \circ \delta)(\alpha \otimes \beta) \\
 &\stackrel{iv.)}{=} 1 \otimes \alpha \vee \beta + \alpha \otimes \beta - 1 \otimes \alpha \vee \beta \\
 &= \alpha \otimes \beta.
 \end{aligned}$$

Das zeigt die ersten beiden Behauptungen. Für die dritte sei  $\mu = \alpha \otimes \beta \otimes u \in \mathcal{K}_k$ , dann folgt:

$$(\partial_{k+1} \circ h_k)(\mu) = \partial_{k+1} \left[ \int_0^1 dt t^k (i_t \circ \delta)(\mu) \right] = \int_0^1 dt t^k (\partial_{k+1} \circ i_t \circ \delta)(\mu),$$

und für den Integranden mit Lemma 1.3.6 *ii.*)

$$\begin{aligned}
 (\partial_{k+1} \circ i_t \circ \delta)(\mu) &= (\partial_{k+1} \circ i_t) [\delta(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \beta \otimes u)] \\
 &= \partial_{k+1} [(i_t \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \beta \otimes u)] \\
 &\stackrel{ii.)}{=} (\partial_{k+1} \circ i_t \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \beta \otimes u) \\
 &\quad + (-1)^1 (i_t \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot \partial_k(1 \otimes \beta \otimes u),
 \end{aligned}$$

womit insgesamt

$$\begin{aligned}
 (\partial_{k+1} \circ h_k)(\mu) &= \int_0^1 dt t^k (\partial_{k+1} \circ i_t \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \beta \otimes u) \\
 &\quad - \int_0^1 dt t^k (i_t \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot \partial_k(1 \otimes \beta \otimes u).
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Für

$$(h_{k-1} \circ \partial_k)(\mu) = \int_0^1 dt t^{k-1} (i_t \circ \delta \circ \partial_k)(\mu)$$

rechnen wir zunächst:

$$\begin{aligned} (\delta \circ \partial_k)(\mu) &= (\delta \circ \partial_k) \left[ (1 \otimes \beta \otimes u) \cdot (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \right] \\ &= \delta \left[ \partial_k (1 \otimes \beta \otimes u) \cdot (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \right] \\ &= (\delta \circ \partial_k) (1 \otimes \beta \otimes u) \cdot (\alpha \otimes 1 \otimes 1) + (-1)^{k-1} \partial_k (1 \otimes \beta \otimes u) \cdot \delta (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \\ &= (\delta \circ \partial_k) (1 \otimes \beta \otimes u) \cdot (\alpha \otimes 1 \otimes 1) + \delta (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot \partial_k (1 \otimes \beta \otimes u). \end{aligned}$$

Anwenden von  $i_t$  liefert:

$$\begin{aligned} (i_t \circ \delta \circ \partial_k)(\mu) &= (i_t \circ \delta \circ \partial_k) (1 \otimes \beta \otimes u) \cdot i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \\ &\quad + (i_t \circ \delta) (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_t \circ \partial_k) (1 \otimes \beta \otimes u) \\ &= k (1 \otimes \beta \otimes u) \cdot i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \\ &\quad + t (i_t \circ \delta) (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot \partial_k (1 \otimes \beta \otimes u). \end{aligned}$$

In der Tat erhalten wir für den ersten Term in der letzten Gleichheit:

$$\begin{aligned} (i_t \circ \delta \circ \partial_k) (1 \otimes \beta \otimes u) &= (i_t \circ \delta) \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} u_j \otimes \beta \otimes u^j - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} 1 \otimes u_j \vee \beta \otimes u^j \right) \\ &= i_t \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} 1 \otimes \beta \otimes u_j \wedge u^j \right) \\ &= k (1 \otimes \beta \otimes u) \end{aligned}$$

und für den zweiten:

$$\begin{aligned} (i_t \circ \partial_k)(1 \otimes \beta \otimes u) &= i_t \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} [u_j \otimes \beta \otimes u^j - 1 \otimes u_j \vee \beta \otimes u^j] \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} [t (u_j \otimes \beta \otimes u^j) + (1-t) (1 \otimes u_j \vee \beta \otimes u^j) - (1 \otimes u_j \vee \beta \otimes u^j)] \\ &= t \partial_k (1 \otimes \beta \otimes u). \end{aligned}$$

Das Zwischenergebnis lautet

$$\begin{aligned} (h_{k-1} \circ \partial_k)(\mu) &= \int_0^1 dt k t^{k-1} i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \beta \otimes u) \\ &\quad + \int_0^1 dt t^k (i_t \circ \delta) (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot \partial_k (1 \otimes \beta \otimes u), \end{aligned} \tag{1.13}$$

wobei der zweite Summand bereits das Negative vom zweiten Summanden in (1.12) ist.

Für den ersten erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt \, k \, t^{k-1} i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1) &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} [t^k i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1)] - \int_0^1 dt \, t^k \frac{d}{dt} i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \\ &= (\alpha \otimes 1 \otimes 1) - \int_0^1 dt \, t^k (\partial_k \circ i_t \circ \delta) (\alpha \otimes 1 \otimes 1), \end{aligned}$$

dabei folgt die letzte Gleichheit mit Lemma 1.3.6 *iv.*) und

$$\int_0^1 dt \frac{d}{dt} [t^k i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1)] = [t^k i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1)]_0^1 = i_t (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \big|_{t=1} = (\alpha \otimes 1 \otimes 1).$$

Aus (1.13) wird dann

$$\begin{aligned} (h_{k-1} \circ \partial_k)(\mu) &= (\alpha \otimes \beta \otimes u) - \int_0^1 dt \, t^k (\partial_k \circ i_t \circ \delta) (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \beta \otimes u) \\ &\quad + \int_0^1 dt \, t^k (i_t \circ \delta) (\alpha \otimes 1 \otimes 1) \cdot \partial_k (1 \otimes \beta \otimes u), \end{aligned} \tag{1.14}$$

und Addition von (1.12) und (1.14) zeigt schließlich die Behauptung. ■

Hiermit erhalten wir umgehend folgenden Satz:

**Satz 1.3.8**

Sei  $\mathcal{A} = S^\bullet(\mathbb{V})$  und  $\mathcal{M}$  ein  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul, dann gilt:

$$HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M})) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M})).$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}).$$

BEWEIS: Die erste Isomorphie hatten wir bereits eingesehen, und die zweite folgt mit Lemma A.2.15 *ii.*) unmittelbar aus dem Fakt, dass sowohl  $(X, d, \epsilon)$ , als auch  $(\mathcal{K}, \partial, \epsilon)$  projektive Auflösungen von  $S^\bullet(\mathbb{V})$  sind.

Für die zweite Behauptung sei  $\phi \in \mathcal{K}_k^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$  und  $\omega = \alpha \otimes \beta \otimes u \in \mathcal{K}_{k+1}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} (\partial_{k+1}^* \phi)(\omega) &= \phi(\partial_{k+1}(\alpha \otimes \beta \otimes u)) \\ &= \phi \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} [u_j \vee \alpha \otimes \beta \otimes u^j - \alpha \otimes u_j \vee \beta \otimes u^j] \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} [u_j \otimes 1 - 1 \otimes u_j] *_e \phi(\alpha \otimes \beta \otimes u^j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

womit  $\ker(\partial_{k+1}^*) = \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$  und  $\text{im}(\partial_k^*) = 0$ , also

$$H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{A})) = \ker(\partial_{k+1}^*) / \text{im}(\partial_k^*) = \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

Ohne zusätzliche Annahmen über  $\mathbb{V}$  und  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$  erhalten wir jedoch im Allgemeinen kein Analogon zu (1.8). Es gilt jedoch:

**Korollar 1.3.9**

Sei  $\mathbb{V}$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\mathcal{M}$  ein symmetrischer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul, dann ist:

$$HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \mathcal{M} \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}).$$

BEWEIS: Dies folgt analog zum zweiten Teil von Satz 1.2.3, da wegen der endlichen Dimension  $n$  von  $\mathbb{V}$  mit  $\mathbb{V}^* \cong \mathbb{V}$  ebenfalls  $\Lambda^k(\mathbb{V})^* \cong \Lambda^k(\mathbb{V}^*) \cong \Lambda^k(\mathbb{V})$  gilt. Es folgt dann zunächst für  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$ , dass

$$\phi(a^e \otimes \omega) = \left( \sum_{j_1, \dots, j_k} \phi^{j_1, \dots, j_k} \otimes e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k} \right) (a^e \otimes \omega)$$

mit  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$  eine Basis von  $\mathbb{V}$  und  $\{e^i\}_{1 \leq i \leq n}$  die hierzu duale Basis von  $\mathbb{V}^*$ . Dies zeigt  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}) \cong \mathcal{M} \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}^*) \cong \mathcal{M} \otimes \Lambda^k(\mathbb{V})$ , wobei die zweite Isomorphie vermöge  $\Lambda^k(\mathbb{V}^*) \cong \Lambda^k(\mathbb{V})$  am leichtesten mit einem Basis-Argument und Bemerkung B.3.4 folgt.  $\blacksquare$

### 1.3.3. Explizite Kettenabbildungen

Wir wollen nun explizite Kettenabbildungen für die Bar- und Koszulauflösung angeben. Seien hierfür abstrakte  $\mathcal{A}^e$ -lineare Varianten von (1.10) und (1.11) gegeben durch:

$$\begin{aligned} F_k: S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{k+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \\ (\alpha \otimes \beta \otimes u) &\longmapsto \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)} \otimes \beta) \end{aligned} \quad (1.15)$$

für  $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$  sowie

$$\begin{aligned} G_k: \bigotimes_{i=1}^{k+2} S^\bullet(\mathbb{V}) &\longrightarrow S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) \\ \omega &\longmapsto \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (i \circ \delta)(\omega) \end{aligned} \quad (1.16)$$

mit  $G_0 = F_0 = \text{id}_{\mathcal{A}^e}$ . Die beteiligten Komponenten sind dabei wie folgt definiert:

**Definition 1.3.10**

i.) Seien  $\mu = (\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_m \otimes \beta \otimes \omega)$  und  $\nu = (\alpha' \otimes u'_1 \otimes \dots \otimes u'_m \otimes \beta' \otimes \omega')$ , so definieren wir das komponentenweise Produkt

$$\therefore \bigotimes_{i=1}^{m+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) \times \bigotimes_{i=1}^{m+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V}) \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{m+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V})$$

durch

$$\therefore (\mu, \nu) \longmapsto \alpha \vee \alpha' \otimes u_1 \vee u'_1 \otimes \dots \otimes u_m \vee u'_m \otimes \beta \vee \beta' \otimes \omega \wedge \omega'.$$

Im Spezialfall  $m = 0$  stimmt dieses mit unserer alten Definition überein. Sinngemäß sei diese Abbildung auch für  $k = 0$  definiert.

ii.)

$$\begin{aligned} \hat{\circ}: \bigotimes_{i=1}^{l+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V}) \times \bigotimes_{i=1}^{l'+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V}) &\longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{l+l'+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V}) \\ ((\alpha \otimes \bar{u} \otimes \beta \otimes \omega), (\alpha' \otimes \bar{u}' \otimes \beta' \otimes \omega')) &\longmapsto \alpha \vee \alpha' \otimes \bar{u} \otimes \bar{u}' \otimes \beta \vee \beta' \otimes \omega \wedge \omega'. \end{aligned}$$

iii.)

$$\begin{aligned} i: \bigotimes_{i=1}^{k+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V}) &\longrightarrow [S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V})][t_1, \dots, t_k] \\ \alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta \otimes \omega &\longmapsto (\alpha \otimes \beta) *_e \left[ \prod_{s=1}^k \hat{i}_s(1 \otimes u_s \otimes 1) \right] \otimes \omega \end{aligned}$$

mit  $\prod$  das Produkt  $\cdot$  für den Spezialfall  $k = 0$  und  $\hat{i}_s$  die  $\mathcal{A}^e$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{i}_s: \bigotimes_{i=1}^3 S^\bullet(\mathbb{V}) &\longrightarrow \left[ \bigotimes_{i=1}^2 S^\bullet(\mathbb{V}) \right][t_s] \\ \alpha \otimes u \otimes \beta &\longmapsto t_s^m u \vee \alpha \otimes \beta + t_s^{m-1}(1-t_s) \sum_{j=1}^m u^j \vee \alpha \otimes u_j \vee \beta + \dots \\ &\quad + t_s^{m-l}(1-t_s)^l \sum_{j_1, \dots, j_l}^m u^{j_1, \dots, j_l} \vee \alpha \otimes u_{j_1, \dots, j_l} \vee \beta + \dots \\ &\quad + (1-t_s)^m \alpha \otimes u \vee \beta, \end{aligned}$$

mit  $\deg(u) = m$  und  $\hat{i}_s(\alpha \otimes 1 \otimes \beta) = \alpha \otimes \beta$ .

Für Elemente  $\alpha \otimes u \otimes \beta \otimes \omega$  schreiben wir im Folgenden auch  $i_s(\alpha \otimes u \otimes \beta \otimes \omega)$  anstelle  $i(\alpha \otimes u \otimes \beta \otimes \omega)$ , um zu verdeutlichen, dass das Bild dieses Elementes nur von einer Variablen  $t_s$  abhängt. Ist es an gegebener Stelle angebracht, so schreiben wir der Deutlichkeit halber auch  $i_{t_1, \dots, t_k}$  anstatt  $i$ .

iv.)

$$\begin{aligned} \delta: \bigotimes^{\bullet+2} S^\bullet(\mathbb{V}) &\longrightarrow \bigotimes^{\bullet+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet(\mathbb{V}) \\ \alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta &\longmapsto \sum_{j_1}^{n_1} \dots \sum_{j_k}^{n_k} \alpha \otimes u_1^{j_1} \otimes \dots \otimes u_k^{j_k} \otimes \beta \otimes (u_1)_{j_1} \wedge \dots \wedge (u_k)_{j_k} \\ &\longmapsto (\alpha \otimes \beta) *_{\hat{e}} \widehat{\bigodot}_{s=1}^k \tilde{\delta}(1 \otimes u_s \otimes 1) \end{aligned}$$

mit  $\deg(u_i) = n_i$  und  $\widehat{\bigodot}$  das Produkt  $\hat{\odot}$ . Dabei bezeichnet  $\tilde{\delta}$  die  $\mathcal{A}^e$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}: S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) &\longrightarrow S^\bullet \otimes S^{\bullet-1}(\mathbb{V}) \otimes S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^1(\mathbb{V}) \\ \alpha \otimes u \otimes \beta &\longmapsto \sum_{j=1}^k \alpha \otimes u^j \otimes \beta \otimes u_j \end{aligned}$$

mit  $\deg(u) = k$  und  $\tilde{\delta}(\alpha \otimes 1 \otimes \beta) = 0$ .

### Bemerkung 1.3.11

- i.) Der Wohldefiniertheit wegen sei angemerkt, dass auch hier die beteiligten Komponenten als Einschränkungen von symmetrisierten und antisymmetrisierten Abbildungen auf die jeweiligen Unterräume geschrieben werden können. Besagte Abbildungen werden in Kapitel 2.2 nachgeliefert, da wir sie dort auch explizit benötigen.
- ii.) In dem Moment, in dem wir die Kettenabbildungs-Eigenschaft von  $F$  und  $G$  nachgewiesen haben zeigt der Beweis von Lemma A.2.15 ii.), dass  $F^*$  und  $G^*$  zueinander inverse Isomorphismen  $\tilde{F}^*$  und  $\tilde{G}^*$  auf Kohomologie-Niveau induzieren.

Der zweite Teil des folgenden Lemmas liefert uns die Kettenabbildungs-Eigenschaft von  $F$ . Die Bedeutung des ersten Teils wird am Ende dieses Kapitels klar werden.

### Lemma 1.3.12

Es gilt:

- i.)  $G_k \circ F_k = \text{id}_{\mathcal{K}_k}$
- ii.)  $d_k \circ F_k = F_{k-1} \circ \partial_k$ .

BEWEIS: i.) Mit  $\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k = \frac{1}{k!}$  und  $\alpha \otimes \beta \otimes u \in \mathcal{K}_k$  folgt:

$$\begin{aligned} (G_k \circ F_k)(\alpha \otimes \beta \otimes u) &= \int_0^1 dt \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (i \circ \delta)(F_k(\alpha \otimes \beta \otimes u)) \\ &= \int_0^1 dt \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (i \circ \delta) \left( \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)} \otimes \beta) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dt \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k i \left( \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes \beta \otimes u_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(k)}) \right) \\
&= \int_0^1 dt \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k i \left( \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes \beta \otimes u) \right) \\
&= k! \int_0^1 dt \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (\alpha \otimes \beta \otimes u) \\
&= (\alpha \otimes \beta \otimes u).
\end{aligned}$$

ii.) Sei zunächst  $\mu = \alpha \otimes \beta \otimes v$  mit  $\deg(v) = 1$ , dann folgt mit  $F_0 = \text{id}_{\mathcal{A}^e}$

$$(d_1 \circ F_1)(\alpha \otimes \beta \otimes v) = \alpha \vee v \otimes \beta - \alpha \otimes v \vee \beta = (F_0 \circ \partial_1)(\alpha \otimes \beta \otimes v),$$

und für  $k > 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
(d_k \circ F_k)(\mu) &= (-1)^0 \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\alpha \vee u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)} \otimes \beta) \\
&\quad + (-1)^k \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k-1)} \otimes u_{\sigma(k)} \vee \beta) \\
&\quad + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(j)} \vee u_{\sigma(j+1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)} \otimes \beta)}_0 \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(1)=j}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \vee u_j \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k)} \otimes \beta) \\
&\quad + (-1)^k \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(k)=j}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(k-1)} \otimes u_j \vee \beta) \\
&= \sum_{j=1}^k \text{sign}(\pi_{1 \leftarrow j}) \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \vee u_j \otimes \sigma^* u^j \otimes \beta) \\
&\quad + (-1)^k \sum_{j=1}^k \text{sign}(\pi_{j \rightarrow k}) \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes \sigma^* u^j \otimes u_j \vee \beta).
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet  $\sigma^* u^j$  lediglich die Permutation  $\sigma$ , angewandt auf das Element

$$\mathbb{T}^{k-1}(\mathbb{V}) \ni u^j = u_1 \otimes \dots \otimes u_k.$$

$\pi_{1 \leftarrow j}$  bezeichnet die Permutation, die  $u_j$  sukzessive durch Transpositionen an die erste Stelle schiebt, sinngemäß für  $\pi_{j \rightarrow k}$ . Es folgt

$$(d_k \circ F_k)(\mu) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \vee u_j \otimes \sigma^* u^j \otimes \beta)$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^k (-1)^k (-1)^{k-j} \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes \sigma^* u^j \otimes u_j \vee \beta) \\
 & = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \vee u_j \otimes \sigma^* u^j \otimes \beta) \\
 & \quad - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \text{sign}(\sigma) (\alpha \otimes \sigma^* u^j \otimes u_j \vee \beta) \\
 & = F_{k-1} \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} [u_j \vee \alpha \otimes \beta \otimes u^j - \alpha \otimes u_j \vee \beta \otimes u^j] \right) \\
 & = (F_{k-1} \circ \partial_k)(\mu).
 \end{aligned}$$

■

Für die Kettenabbildungs-Eigenschaft von  $G$  benötigen wir zunächst einige Rechenregeln.

**Lemma 1.3.13**

i.)

$$\hat{i}_s(v \cdot w) = \hat{i}_s(v) \cdot \hat{i}_s(w) \quad (1.17)$$

$$i(\mu \cdot \nu) = i(\mu) \cdot i(\nu), \quad (1.18)$$

für  $v, w \in \bigotimes^3 S^\bullet(\mathbb{V})$  sowie  $\mu, \nu \in \bigotimes^{m+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^\bullet$ .

ii.)

$$\delta(v \cdot w) = \delta(v) \cdot w \otimes 1 + v \otimes 1 \cdot \delta(w), \quad (1.19)$$

für  $v, w \in \bigotimes^3 S^\bullet(\mathbb{V})$ .

iii.)

$$i(\mu \hat{\circ} \nu) = i(\mu) \cdot i(\nu) \quad (1.20)$$

$$\delta(\mu \hat{\circ} \nu) = \delta(\mu) \hat{\circ} \delta(\nu) \quad (1.21)$$

iv.)

$$\frac{d}{ds} \hat{i}_s(\alpha \otimes u \otimes \beta) = (\partial_1 \circ i_s \circ \delta)(\alpha \otimes u \otimes \beta), \quad (1.22)$$

$$\partial_k \left[ \prod_{i=1}^k (1 \otimes 1 \otimes u_i) \right] = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \partial_1(1 \otimes 1 \otimes u_j) \cdot \prod_{i \neq j} (1 \otimes 1 \otimes u_i) \quad (1.23)$$

für  $u_i \in \Lambda^1(\mathbb{V})$ .

BEWEIS: *i.)* (1.17) folgt wie Lemma 1.3.6 *iv)* mit der Kommutativität von  $\vee$ .

Für (1.18) seien  $\mu = (1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_m \otimes 1 \wedge \omega)$  und  $\nu = (1 \otimes u'_1 \otimes \dots \otimes u'_m \otimes 1 \wedge \omega')$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} i(\mu \cdot \nu) &= \left[ \prod_{s=1}^m \hat{i}_s(1 \otimes u_s \vee u'_s \otimes 1) \right] \otimes \omega \wedge \omega' \\ &= \left[ \prod_{s=1}^m \hat{i}_s(1 \otimes u_s \otimes 1) \cdot \hat{i}_s(1 \otimes u'_s \otimes 1) \right] \otimes \omega \wedge \omega' \\ &= \left( \left[ \prod_{s=1}^m \hat{i}_s(1 \otimes u_s \otimes 1) \right] \otimes \omega \right) \cdot \left( \left[ \prod_{s=1}^m \hat{i}_s(1 \otimes u'_s \otimes 1) \right] \otimes \omega' \right) \\ &= i(\mu) \cdot i(\nu). \end{aligned}$$

*ii.)* Wir rechnen

$$\begin{aligned} \delta[(1 \otimes u \otimes 1) \cdot (1 \otimes u' \otimes 1)] &= \sum_{j=1}^{m+m'} (1 \otimes [u \vee u']^j \otimes 1 \otimes [u \vee u']_j) \\ &= \sum_{j=1}^m (1 \otimes u^j \otimes 1 \otimes u_j) \cdot (1 \otimes u' \otimes 1 \otimes 1) + (1 \otimes u \otimes 1 \otimes 1) \cdot \sum_{j=1}^{m'} (1 \otimes u'^j \otimes 1 \otimes u'_j) \\ &= \delta(1 \otimes u \otimes 1) \cdot (1 \otimes u' \otimes 1 \otimes 1) + (1 \otimes u \otimes 1 \otimes 1) \cdot \delta(1 \otimes u' \otimes 1). \end{aligned}$$

Zusammen mit der  $\mathcal{A}^e$ -Linearität von  $\delta$  zeigt dies (1.19).

*iii.)* Für (1.20) seien  $\mu = (\alpha \otimes \bar{u} \otimes \beta \otimes \omega)$  und  $\nu = (\alpha' \otimes \bar{u}' \otimes \beta' \otimes \omega')$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} i(\mu \hat{\circ} \nu) &= (\alpha \vee \alpha' \otimes \beta \vee \beta') *_e \left[ \prod_{s=1}^{m+m'} \hat{i}_s(1 \otimes (\bar{u} \otimes \bar{u}')_s \otimes 1) \right] \otimes \omega \wedge \omega' \\ &= (\alpha \otimes \beta) *_e (\alpha' \otimes \beta') *_e \left[ \prod_{s=1}^m \hat{i}_s(1 \otimes \bar{u}_s \otimes 1) \cdot \prod_{s=1}^{m'} \hat{i}_s(1 \otimes \bar{u}'_s \otimes 1) \right] \otimes \omega \wedge \omega' \\ &= \left( (\alpha \otimes \beta) *_e \left[ \prod_{s=1}^m \hat{i}_s(1 \otimes \bar{u} \otimes 1) \right] \otimes \omega \right) \cdot \left( (\alpha' \otimes \beta') *_e \left[ \prod_{s=1}^{m'} \hat{i}_s(1 \otimes \bar{u}' \otimes 1) \right] \otimes \omega' \right) \\ &= i(\mu) \cdot i(\nu). \end{aligned}$$

(1.21) folgt mit  $\mu = (\alpha \otimes \bar{u} \otimes \beta)$  und  $\nu = (\alpha' \otimes \bar{u}' \otimes \beta')$  analog zu (1.20) für  $\widehat{\odot}$  anstelle von  $\prod$ ,  $i$  anstelle  $\delta$  und  $\widetilde{\delta}$  anstelle  $i_s$ :

$$\delta(\mu \hat{\circ} \nu) = (\alpha \vee \alpha' \otimes \beta \vee \beta') *_e \left[ \widehat{\odot}_{l=1}^{m+m'} \widetilde{\delta}(1 \otimes (\bar{u} \otimes \bar{u}')_l \otimes 1) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha \otimes \beta) *_e (\alpha' \otimes \beta') *_e \left[ \widehat{\odot}_{l=1}^m \tilde{\delta}(1 \otimes \bar{u}_l \otimes 1) \hat{\odot} \widehat{\odot}_{l=1}^{m'} \tilde{\delta}(1 \otimes \bar{u}'_l \otimes 1) \right] \\
 &= \left( (\alpha \otimes \beta) *_e \left[ \widehat{\odot}_{l=1}^m \tilde{\delta}(1 \otimes \bar{u} \otimes 1) \right] \right) \hat{\odot} \left( (\alpha' \otimes \beta') *_e \left[ \widehat{\odot}_{l=1}^{m'} \tilde{\delta}(1 \otimes \bar{u}' \otimes 1) \right] \right) \\
 &= \delta(\mu) \hat{\odot} \delta(\nu).
 \end{aligned}$$

iv.) Für (1.22) erhalten wir analog zu Lemma 1.3.6 iv):

$$\frac{d}{ds} \hat{i}_s(\alpha \otimes 1 \otimes \beta) = 0 = (\partial_1 \circ i_s \circ \delta)(\alpha \otimes 1 \otimes \beta)$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \hat{i}_s(\alpha \otimes v \otimes \beta) &= \frac{d}{ds} [s(v \vee \alpha \otimes 1) + (1-s)(1 \otimes v \vee \beta)] \\
 &= (v \vee \alpha \otimes 1 - 1 \otimes v \vee \beta) \\
 &= \partial_1(\alpha \otimes \beta \otimes v) \\
 &= (\partial_1 \circ i_s)(\alpha \otimes 1 \otimes \beta \otimes v) \\
 &= (\partial_1 \circ i_s \circ \delta)(\alpha \otimes v \otimes \beta),
 \end{aligned}$$

und mit der  $\mathcal{A}^e$ -Linearität beider Seiten induktiv:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \hat{i}_s(1 \otimes v \vee u \otimes 1) &= \frac{d}{ds} [\hat{i}_s(1 \otimes v \otimes 1) \cdot \hat{i}_s(1 \otimes u \otimes 1)] \\
 &= \frac{d}{ds} \hat{i}_s(1 \otimes v \otimes 1) \cdot \hat{i}_s(1 \otimes u \otimes 1) + \hat{i}_s(1 \otimes v \otimes 1) \cdot \frac{d}{ds} \hat{i}_s(1 \otimes u \otimes 1) \\
 &= (\partial_1 \circ i_s \circ \delta)(1 \otimes v \otimes 1) \cdot \hat{i}_s(1 \otimes u \otimes 1) + \hat{i}_s(1 \otimes v \otimes 1) \cdot (\partial_1 \circ i_s \circ \delta)(1 \otimes u \otimes 1) \\
 &= \partial_1 \left[ (i_s \circ \delta)(1 \otimes v \otimes 1) \cdot i_s(1 \otimes u \otimes 1 \otimes 1) + i_s(1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_s \circ \delta)(1 \otimes u \otimes 1) \right] \\
 &= (\partial_1 \circ i_s) \left[ \delta(1 \otimes v \otimes 1) \cdot (1 \otimes u \otimes 1 \otimes 1) + (1 \otimes v \otimes 1 \otimes 1) \cdot \delta(1 \otimes u \otimes 1) \right] \\
 &= (\partial_1 \circ i_s \circ \delta)(1 \otimes v \vee u \otimes 1).
 \end{aligned}$$

(1.23) erhält man mit

$$\begin{aligned}
 \partial_k \left[ \prod_{i=1}^k (1 \otimes 1 \otimes u_i) \right] &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (1 \otimes 1 \otimes u_i) \cdot \partial_1(1 \otimes 1 \otimes u_j) \cdot \prod_{i=j+1}^k (1 \otimes 1 \otimes u_i) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \partial_1(1 \otimes 1 \otimes u_j) \cdot \prod_{i \neq j} (1 \otimes 1 \otimes u_i).
 \end{aligned}$$

■

Folgende Proposition zeigt schließlich die gewünschte Eigenschaft von  $G$ .

**Proposition 1.3.14**

Es gilt:

$$\partial_k \circ G_k = G_{k-1} \circ d_k.$$

BEWEIS: Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} & (\partial_k \circ G_k)(1 \otimes \bar{u} \otimes 1) \\ & \stackrel{(1.20)}{=} \partial_k \left[ \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (i_1 \circ \delta)(1 \otimes u_1 \otimes 1) \cdot \dots \cdot (i_k \circ \delta)(1 \otimes u_k \otimes 1) \right] \\ & \stackrel{(1.23)}{=} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (\partial_1 \circ i_j \circ \delta)(1 \otimes u_j \otimes 1) \cdot \prod_{i \neq j} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \\ & \stackrel{(1.22)}{=} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \frac{d}{dt_j} i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i \neq j} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \\ & = \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \frac{d}{dt_j} [i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_{j+1} \circ \delta)(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1)] \cdot \prod_{\substack{i \neq j \\ i \neq j+1}}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \\ & \quad + (-1)^{k-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \frac{d}{dt_k} i_k(1 \otimes u_k \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1). \end{aligned}$$

Nun folgt durch Anwendung von  $\int_0^{t_{j-1}} dt_j$  auf

$$\int_0^{t_j} dt_{j+1} \frac{d}{dt_j} f(t_j, t_{j+1}) = \frac{d}{dt_j} \left[ \int_0^{t_j} dt_{j+1} f(t_j, t_{j+1}) \right] - f(t_j, t_j),$$

dass

$$\int_0^{t_{j-1}} dt_j \int_0^{t_j} dt_{j+1} \frac{d}{dt_j} f(t_j, t_{j+1}) = \int_0^{t_{j-1}} dt_{j+1} f(t_{j-1}, t_{j+1}) - \int_0^{t_{j-1}} dt_j f(t_j, t_j),$$

mithin für  $2 \leq j \leq k-1$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{j-1}} dt_j \int_0^{t_j} dt_{j+1} \frac{d}{dt_j} [i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_{j+1} \circ \delta)(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1)] \int_0^{t_{j+1}} dt_{j+2} \dots \\ & = \int_0^{t_{j-1}} dt_{j+1} [i_{j-1}(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_{j+1} \circ \delta)(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1)] \int_0^{t_{j+1}} dt_{j+2} \dots \\ & \quad - \int_0^{t_{j-1}} dt_j [i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1)] \int_0^{t_j} dt_{j+2} \dots \end{aligned}$$

Für  $j=1$  gilt nun obige Formel ebenfalls mit  $t_0 \simeq t_{j-1} = 1$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} & (\partial_k \circ G_k)(1 \otimes \bar{u} \otimes 1) \\ & = \overbrace{i_0(1 \otimes u_1 \otimes 1 \otimes 1)}^{u_1 \otimes 1 \otimes 1} \Big|_{t_0=1} \cdot \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \prod_{2 \leq i \leq k} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \\ & \quad - \int_0^1 dt_1 i_1(1 \otimes u_1 \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_1 \circ \delta)(1 \otimes u_2 \otimes 1) \cdot \int_0^{t_1} dt_3 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \prod_{3 \leq i \leq k} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \\ & \quad + \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{j-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{j-2}} dt_{j-1} \int_0^{t_{j-1}} dt_{j+1} \int_0^{t_{j+1}} dt_{j+2} \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ i_{j-1}(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i \neq j} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \right] \\
 & - \sum_{j=2}^{k-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{j-2}} dt_{j-1} \int_0^{t_{j-1}} dt_j \int_0^{t_j} dt_{j+2} \int_0^{t_{j+2}} dt_{j+3} \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \\
 & \left[ i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1) \cdot \prod_{\substack{i \neq j \\ i \neq j+1}} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \right] \\
 & + (-1)^{k-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot \underbrace{\left[ i_k(1 \otimes u_k \otimes 1 \otimes 1) \right]_0^{t_{k-1}}}_{i_{k-1}(1 \otimes u_k \otimes 1 \otimes 1) - 1 \otimes u_k \otimes 1} .
 \end{aligned}$$

Durch Umbenennung der  $t_j$ -Variablen in jedem Summanden zu  $t_1, \dots, t_{k-1}$ , folgt:

$$\begin{aligned}
 & (\partial_k \circ G_k)(1 \otimes \bar{u} \otimes 1) \\
 & = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 & - \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} i_1(1 \otimes u_1 \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \\
 & + \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{j-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ i_{j-1}(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot \right. \\
 & \quad \left. \prod_{i=j}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=2}^{k-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1) \cdot \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \prod_{i=j+1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & + (-1)^{k-1} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_{k-1}(1 \otimes u_k \otimes 1 \otimes 1) \\
 & + (-1)^k \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \\
 = & \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 & + (-1)^1 \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} i_1(1 \otimes u_1 \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_{t_1, \dots, t_k} \circ \delta)(1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 & - \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_{j-1}(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=j}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & + \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=j}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & - (-1)^k \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_{k-1}(1 \otimes u_k \otimes 1 \otimes 1) \\
 & + (-1)^k \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \\
 = & \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 & + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=j}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & - \sum_{j=2}^k (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_{j-1}(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=j}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & + (-1)^k \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \\
 = & \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 & + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=j}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^j (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot i_j(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1 \otimes 1) \cdot \prod_{i=j+1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & + (-1)^k \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \\
 = & \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_i \otimes 1) \cdot \right. \\
 & \quad \left. [i_j(1 \otimes u_j \otimes 1 \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1) + (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_j \otimes 1) \cdot i_j(1 \otimes u_{j+1} \otimes 1 \otimes 1)] \cdot \right. \\
 & \quad \left. \prod_{i=j+1}^{k-1} (i_i \circ \delta)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & + (-1)^k \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \\
 & = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 & + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_j \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_j \vee u_{j+1} \otimes 1) \cdot \right. \\
 & \quad \left. \prod_{i=j+1}^{k-1} (i_i \circ \delta_k)(1 \otimes u_{i+1} \otimes 1) \right] \\
 & + (-1)^k \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \\
 & = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-2}} dt_{k-1} (i \circ \delta \circ d)(1 \otimes \bar{u} \otimes 1) \\
 & = (G_{k-1} \circ d_k)(1 \otimes \bar{u} \otimes 1).
 \end{aligned}$$

Ebenso folgt für den Fall  $\alpha \otimes u \otimes \beta \in X_1$ , dass

$$\begin{aligned}
 (\partial_1 \circ G_1)(\alpha \otimes u \otimes \beta) &= \int_0^1 dt (\partial_1 \circ i_t \circ \delta)(\alpha \otimes u \otimes \beta) = \hat{i}_t(\alpha \otimes u \otimes \beta)|_0^1 \\
 &= d_1(\alpha \otimes u \otimes \beta) = (G_0 \circ d_1)(\alpha \otimes u \otimes \beta). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### Bemerkung 1.3.15 (Die Kettenabbildungen $F$ und $G$ )

Es gibt auch durchaus abstraktere Möglichkeiten, die Hochschild-Kohomologie der symmetrischen Algebra zu berechnen, vgl. [CE99]. Der von uns beschrittene Weg bietet jedoch den großen Vorteil, dass uns nun explizite Kettenabbildungen  $F$  und  $G$  zwischen Bar- und Koszul-Komplex zur Verfügung stehen, die zueinander inverse Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 \widetilde{F}_k^* &: H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M})) \longrightarrow H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M})) \quad \text{und} \\
 \widetilde{G}_k^* &: H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M})) \longrightarrow H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{M}))
 \end{aligned}$$

induzieren. Diese können auf verschiedene Arten nutzbringend eingesetzt werden:

- i.) Mit obigen Kettenabbildungen ist es möglich, die Isomorphismen der Kohomologie-Gruppen von Unterkomplexen  $(\mathcal{X}, d^*)$  von  $(X^*, d^*)$  und  $(K, \partial^*)$  von  $(\mathcal{K}^*, \partial^*)$  zu zeigen. Dabei ist ein Unterkomplex  $(\mathcal{X}, d^*)$  von  $(X^*, d^*)$  ein Kokettenkomplex derart, dass  $\mathcal{X}^k \subseteq X_k^*$  und  $d_{k+1}^* : \mathcal{X}^k \longrightarrow \mathcal{X}^{k+1}$  gilt. Analog für  $(K, \partial^*)$  und  $(\mathcal{K}^*, \partial^*)$ . Hierfür ist zunächst nachzuweisen, dass

$$\begin{aligned}
 F_k^* &: \mathcal{X}^k \longrightarrow K^k \quad \text{und} \\
 G_k^* &: K^k \longrightarrow \mathcal{X}^k,
 \end{aligned}$$

also  $F^k = F_k^*|_{\mathcal{X}^k}$  gilt und somit  $G^k = G_k^*|_{K^k}$  wohldefinierte Kettenabbildungen zwischen besagten Unterkomplexen sind. Lemma 1.3.12 i.) zeigt dann, dass

$$F_k^* \circ G_k^* = \text{hom}_{\mathcal{A}^e}(\cdot, \mathcal{M})(G_k \circ F_k) = \text{id}_{K_k^*},$$

also  $F^k \circ G^k = \text{id}_{K^k}$  und somit  $\widetilde{F^k} \circ \widetilde{G^k} = \widetilde{F^k \circ G^k} = \text{id}_{H^k(K, d^*)}$  gilt. Hiermit folgt die Injektivität von  $\widetilde{G^k}$  und die Surjektivität von  $\widetilde{F^k}$ . Für die umgekehrte Aussage beachten man, dass  $G \circ F: (\mathcal{X}, d^*) \rightarrow (\mathcal{X}, d^*)$  eine Kettenabbildung ist. Können wir dann  $G \circ F \sim \text{id}_{\mathcal{X}^k}$  vermöge Homotopieabbildungen  $s^k: \mathcal{X}^k \rightarrow \mathcal{X}^{k-1}$  nachweisen, so zeigt Lemma A.2.9, dass  $\widetilde{G^k} \circ \widetilde{F^k} = \widetilde{G^k \circ F^k} = \text{id}_{H^k(\mathcal{X}, d^*)}$  gilt. Dies liefert die Surjektivität von  $\widetilde{G^k}$  und die Injektivität von  $\widetilde{F^k}$ , also  $H^k(\mathcal{X}, d^*) \cong H^k(K, \partial^*)$  vermöge den zueinander inversen Isomorphismen  $\widetilde{G^k}$  und  $\widetilde{F^k}$ . Hierbei beachte man, dass die Existenz einer derartigen Homotopie nicht offensichtlich ist. In der Tat besagt zwar Satz A.2.12, dass  $F \circ G \sim \text{id}_{X_k}$  vermöge  $\mathcal{A}^e$ -linearen Homotopieabbildungen  $s_k: X_k \rightarrow X_{k+1}$  und somit  $G^* \circ F^* \sim \text{id}_{K_k^*}$  vermöge  $s_k^*$ . Jedoch ist in keiner Weise gewährleistet, dass sich die  $s_k^*$  auf Abbildungen zwischen den Unterkomplexen einschränken lassen und die gewünschte Homotopie  $s$  liefern.

Ist man schließlich an den Kohomologie-Gruppen eines speziellen Unterkomplexes  $HC_\circ(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  von  $HC(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  interessiert, so muss jetzt nur noch sichergestellt werden, dass sich der Kettenisomorphismus  $\Xi$  auf eine Isomorphismus zwischen  $(\mathcal{X}, d^*)$  und  $HC_\circ(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  einschränken lässt. Ein essentielles Beispiel ist hierbei der stetige Hochschild-Komplex  $HC_{\text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , den wir im nächsten Kapitel kennen lernen werden.

- ii.) Obige Kettenabbildungen erlauben es, tiefere Erkenntnisse über die Natur von  $HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und  $HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  zu gewinnen. Im Falle symmetrischer Bimoduln beispielsweise erhalten wir Analogie zu dem bekannten Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem<sup>1</sup> für  $HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und  $HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , siehe Kapitel 3. Auch für die Klasse der differentiellen Bimoduln, welche die symmetrischen als Spezialfall enthalten, lassen sich mit Hilfe der Abbildung  $G$  ähnliche Aussagen ableiten, siehe Kapitel 4. Selbst für den Fall, dass in der Situation von i.) nicht klar ist, dass eine Homotopie  $s$  existiert, sind  $\widetilde{G^k}$  injektiv und  $\widetilde{F^k}$  surjektiv und liefern nützliche Informationen über  $HH_\circ^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Dies wird beispielsweise für den differentiellen  $HH_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und den stetig-differentiellen Unterkomplex  $HH_{\text{c,d}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  der Fall sein, welchen wir in Kapitel 4 begegnen werden.
- iii.) Die Kettenabbildungen  $F$  und  $G$  werden es uns erlauben, die Hochschild-Kohomologie des stetigen Unterkomplexes  $HC_{\text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , den wir im nächsten Kapitel für beliebige lokalkonvexe Algebren definieren werden, zu berechnen. Hieraus erhalten wir die Hochschild-Kohomologien  $HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  des ste-

---

<sup>1</sup>vgl. [Wal07, Prop 6.2.48], [CGD80]



tigen Unterkomplexes  $HC_{\text{cont}}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  für vollständige lokalkonvexe<sup>2</sup> Bimoduln  $\mathcal{M}$ . Hierbei ist  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), *)$ , die durch Vervollständigung von  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \vee)$  erhaltene Algebra (vgl. Kapitel 2.3), für welche wir ebenfalls ein Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem erhalten werden. Hierfür beachte man, dass die Berechnung der Hochschild-Kohomologie des Kokettenkomplexes  $HH^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  ein im Allgemeinen schwieriges Problem darstellt, die in Rahmen der Deformationsquantisierung weitaus interessantere, stetige Hochschild-Kohomologie mit dem hier gewählten Zugang aber ausgesprochen einfach zu erhalten ist.

---

<sup>2</sup>vgl. Kapitel 2



## 2. Topologische Komplexe und stetige Hochschild-Kohomologien

Wie bereits in Bemerkung 1.3.15 erwähnt, wollen wir in diesem Kapitel die stetigen Hochschild-Kohomologien  $HC_{\text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und  $HC_{\text{cont}}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  der lokalkonvex topologisierten Algebren  $S^\bullet(\mathbb{V})$  und  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  für lokalkonvexe Bimoduln berechnen. Hierbei heißt ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum lokalkonvex, wenn er ein topologischer Vektorraum ist (Vektorraumoperationen sind stetig) und seine Topologie durch ein Halbnormensystem  $P$  erzeugt wird. Dabei soll  $P$  im Folgenden immer als filtrierend<sup>1</sup> voraussetzen werden. Eine lokalkonvexe  $\mathbb{K}$ -Algebra ist dann ein lokalkonvexer  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit stetiger Algebrenmultiplikation. Dies ist gleichbedeutend damit (vgl. Satz B.1.7), dass für jede Halbnorm  $q \in P$  eine Konstante  $c_* > 0$  und Halbnormen  $p_{*1}, p_{*2} \in P$  derart existieren, dass für alle  $a, b \in \mathcal{A}$  die Abschätzung  $p(a * b) \leq c_* p_{*1}(a) p_{*2}(b)$  erfüllt ist. Sei  $\mathcal{A}$  lokalkonvex, so verstehen wir unter einem lokalkonvexen  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $(\mathcal{M}, *_L, *_R)$  einen lokalkonvexen Vektorraum  $(\mathcal{M}, Q)$  mit stetigen,  $\mathbb{K}$ -bilinearen Modul-Multiplikationen. Dies bedeutet, dass für jedes  $q \in Q$  Konstanten  $c_L, c_R > 0$  sowie Halbnormen  $p_L, p_R \in P$  und  $q_L, q_R \in Q$  existieren, so dass für alle  $a \in \mathcal{A}$  und alle  $m \in \mathcal{M}$  die Abschätzungen  $q(a *_L m) \leq c_L p_L(a) q_L(m)$  und  $q(m *_R a) \leq c_R p_R(a) q_R(m)$  gelten. Ist  $\mathcal{A}$  unitär, so wollen wir wieder  $1_{\mathcal{A}} *_L m = m = m *_R 1_{\mathcal{A}}$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  voraussetzen.

Nach Bemerkung 1.3.15 i.) besteht die Aufgabe nun zunächst darin, einen Unterkomplex  $(\mathcal{X}, d^*)$  von  $(X^*, d^*)$  für  $\mathcal{A} = S^\bullet(\mathbb{V})$  derart zu finden, dass  $\Xi$  einen Kettenisomorphismus  $HC_{\text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{X}, d^*)$  induziert. Dies wird mit Hilfe des folgenden Abschnittes sogar für beliebige lokalkonvexe Algebren  $\mathcal{A}$  erreichbar sein.

### 2.1. Vorbereitung

Gegeben eine lokalkonvexe Algebra  $(\mathcal{A}, *)$  und ein lokal konvexer  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , so betrachten wir die  $\mathbb{K}$ -Vektorräume

$$HC_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \{0\} & k < 0 \\ \mathcal{M} & k = 0 \\ \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{cont}}(\underbrace{\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{k\text{-mal}}, \mathcal{M}) & k \geq 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

die stetigen  $\mathbb{K}$ -multilinearen Abbildungen von  $\mathcal{A}^k$  nach  $\mathcal{M}$ . Mit Satz B.1.7 sind dies wieder gerade die Elemente  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}, \mathcal{M})$  für welche  $q \in Q$  vorgegeben,

---

<sup>1</sup>vgl. Definition B.1.2 ii.)

eine Konstante  $c > 0$  und Halbnormen  $p_1, \dots, p_k \in P$  derart existieren, dass

$$q(\phi(a_1, \dots, a_k)) \leq c p_1(a_1) \dots p_k(a_k) \quad \forall a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A} \quad (2.2)$$

gilt. Vermöge (1.1) seien  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen

$$\delta_c^k : HC_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \longrightarrow HC_{\text{cont}}^{k+1}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

definiert, und es ist zunächst zu zeigen, dass besagtes Bild unter  $\delta_c^k$  stetig ist. Wir haben:

$$\begin{aligned} (\delta_c^k \phi)(a_1, \dots, a_{k+1}) &= a_1 *_L \phi(a_2, \dots, a_{k+1}) + \sum_{i=1}^k (-1)^i \phi(a_1, \dots, a_i * a_{i+1}, \dots, a_{k+1}) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \phi(a_1, \dots, a_k) *_R a_{k+1}. \end{aligned}$$

Für die Stetigkeit des ersten Summanden rechnen wir mit den Abschätzungen für  $*_L$  und  $\phi$ :

$$\begin{aligned} q(a_1 *_L \phi(a_2, \dots, a_{k+1})) &\leq c_L p_L(a_1) q_L(\phi(a_2, \dots, a_{k+1})) \\ &\leq \hat{c} p_L(a_1) p_2(a_2) \dots p_{k+1}(a_{k+1}). \end{aligned}$$

mit  $\hat{c} = c_L c$  und  $c, p_2, \dots, p_{k+1}$  die zu  $q_L$  gehörigen Halbnormen aus (2.2). Satz B.1.7 zeigt dann die Stetigkeit, und die des letzten Summanden folgt analog. Ebenso erhalten wir für den mittleren Summanden, dass

$$\begin{aligned} q(\phi(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{k+1})) &\leq c p_1(a_1) \dots p_{i-1}(a_{i-1}) p_i(a_i * a_{i+1}) p_{i+1}(a_{i+2}) \dots p_k(a_{k+1}) \\ &\leq \hat{c} p_1(a_1) \dots p_{i-1}(a_{i-1}) p_{*1}(a_i) p_{*2}(a_{i+1}) p_{i+1}(a_{i+2}) \dots p_k(a_{k+1}) \end{aligned}$$

mit  $\hat{c} = c_* c$  und  $p_i(a_i * a_{i+1}) \leq c_* p_{*1}(a_i) p_{*2}(a_{i+1})$ . Die Stetigkeit von  $\delta_c^k(\phi)$  folgt nun unmittelbar mit der Stetigkeit der Vektorraumaddition in  $\mathcal{M}$ , da kartesische Produkte stetiger Funktionen bezüglich den zugehörigen Produkttopologien ebenfalls stetig sind.

Mit  $\delta_c^{k+1} \circ \delta_c^k = 0$  liefert uns dies einen Koketten-Unterkomplex  $(HC_{\text{cont}}^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}), \delta_c)$  von  $(HC^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}), \delta)$  und definieren die  $k$ -te stetige Hochschild-Kohomologien durch

$$HH_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \ker(\delta_c^0) & k = 0 \\ HH_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \ker(\delta_c^k) / \text{im}(\delta_c^{k-1}) & k \geq 1. \end{cases}$$

Für die Tensorvariante des Hochschild-Komplexes erhalten wir analoge Aussagen. Dabei folgt die Stetigkeit des Bildes unter  $\delta_{c \otimes}^k$  zum einen durch elementare Rechnung, oder aber auch durch Rechtskomposition (1.2) mit  $\otimes_k^*$ , da die  $\otimes_{k*}$  vermöge der Definition der  $\pi$ -Topologie, also insbesondere der Stetigkeit der Abbildungen  $\otimes_k$ , bijektiv stetige auf stetige Elemente abbilden. Insbesondere bedeutet dies, dass  $\otimes_*$  ein Kettenisomorphismus zwischen diesen beiden Unterkomplexen ist, was die Isomorphie derer

Kohomologiegruppen impliziert. Wir dürfen uns also wieder auf die Tensorvariante des besagten stetigen Hochschild-Komplexes beschränken, und es soll nun unter anderem darum gehen, die Isomorphie

$$HH_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*)$$

einzusehen. Dabei bezeichnet  $(X_c, d_c)$  den topologische Bar-Komplex, welchen wir bald kennen lernen werden.

### Bemerkung 2.1.1

Gegeben lokalkonvexe Vektorräume  $(\mathbb{V}_1, P_1), \dots, (\mathbb{V}_k, P_k), (\mathbb{W}, Q)$  und eine stetige  $\mathbb{K}$ -multilineare Abbildung  $\phi: \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{W}$ , so sind im Folgenden bei Stetigkeitsabschätzungen  $q(\phi(v_1, \dots, v_k)) \leq c p(v_1) \dots p(v_k)$  mit  $c$  und  $p_1, \dots, p_k$  immer die nach Satz B.1.7 zu  $q \in Q$  gehörige Konstante und die zu  $q$  gehörigen Halbnormen gemeint. Hierfür mache man sich noch einmal explizit klar, dass wir Halbnormensysteme am Anfang dieses Kapitels immer als filtrierend vorausgesetzt haben

Wir wollen an dieser Stelle an die  $\pi_k$ -Topologie erinnern:

### Definition 2.1.2 ( $\pi$ -Topologie)

Gegeben lokalkonvexe Vektorräume  $(\mathbb{V}_1, P_1), \dots, (\mathbb{V}_k, P_k)$ , so ist die  $\pi_k$ -Topologie die durch das System  $\Pi_{P_1 \times \dots \times P_k}$  bestehend aus Halbnormen

$$p_1 \otimes \dots \otimes p_k(z) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i) \right\},$$

auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  induzierte lokalkonvexe Topologie. Hierbei ist das Infimum über alle Zerlegungen  $z = \sum_{i=1}^n x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i$  von  $z$  zu nehmen. Der so gewonnenen lokalkonvexen Vektorraum sei im Folgenden mit  $\mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k$  bezeichnet. Ist es an gegebener Stelle der Lesbarkeit zuträglich, so benutzen wir das Symbol  $\pi_{p_1, \dots, p_k}$  anstelle von  $p_1 \otimes \dots \otimes p_k$ .

### Bemerkung 2.1.3

Die  $\pi_k$ -Topologie besitzt die folgenden wichtigen Eigenschaften, siehe Kapitel B.3:

- i.) Es gilt  $p_1 \otimes \dots \otimes p_k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = p_1(x_1) \dots p_k(x_k)$  für alle separablen Elemente  $x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k$ .
- ii.)  $\pi_k$  ist genau dann hausdorffsch, wenn alle  $(\mathbb{V}_i, P_i)$  mit  $1 \leq i \leq k$  hausdorffsch sind.
- iii.) Sind  $P_1, \dots, P_k$  filtrierend, so auch  $\Pi_{P_1, \dots, P_k}$ .
- iv.) Eine lineare Abbildung  $\phi: \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{M}$  ist genau dann stetig, wenn die Abbildung  $\phi \circ \otimes_k$  bezüglich der Produkttopologie auf  $\mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k$  stetig ist,

also für jedes  $q \in Q$  ein  $c > 0$  und  $p_i \in P_i$  mit  $1 \leq i \leq k$  existieren, so dass

$$q(\phi(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)) \leq c p(v_1) \dots p(v_k) \quad \forall v_i \in \mathbb{V}_i, 1 \leq i \leq k$$

gilt.

**Lemma 2.1.4**

Gegeben eine assoziative, lokalkonvexe  $\mathbb{K}$ -Algebra  $(\mathcal{A}, *)$ .

i.) Dann wird die Menge  $\mathcal{A}^e = \mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A}$ , versehen mit der distributiven Fortsetzung der Multiplikation

$$(a \otimes b) *_e (\tilde{a} \otimes \tilde{b}) = (a * \tilde{a}) \otimes (b *^{opp} \tilde{b}) = (a * \tilde{a}) \otimes (\tilde{b} * b)$$

auf ganz  $\mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A}$ , zu einer lokalkonvexen Algebra. Ist  $\mathcal{A}$  unitär, so auch  $\mathcal{A}^e$ .

ii.) Jeder lokalkonvexe  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$  wird vermöge

$$a \otimes b *_e m = a *_L (m *_R b) = (a *_L m) *_R b \quad a \otimes b \in \mathcal{A}^e, m \in \mathcal{M}$$

zu einem lokalkonvexen  $\mathcal{A}^e$ -Linksmodul.

BEWEIS: Die Algebra- und Moduleigenschaften folgen wie in Lemma 1.1.2, die Stetigkeit der Ringaddition ist die Stetigkeit der Vektorraumaddition in  $(\mathcal{A}^e, \pi_2)$  als lkVR und die Stetigkeit der Algebra-Multiplikation erhalten wir mit der Stetigkeit von  $*$ , da

$$\begin{aligned} p_1 \otimes p_2 (z *_e \tilde{z}) &= p_1 \otimes p_2 \left( \sum_i a_i \otimes b_i *_e \sum_j \tilde{a}_j \otimes \tilde{b}_j \right) \leq \sum_{i,j} p_1 \otimes p_2 (a_i * \tilde{a}_j \otimes \tilde{b}_j * b_i) \\ &= \sum_{i,j} p_1(a_i * \tilde{a}_j) p_2(b_i * \tilde{b}_j) \leq c \sum_{i,j} p'_1(a_i) p''_1(\tilde{a}_j) p'_2(b_i) p''_2(\tilde{b}_j) \\ &= c \left( \sum_i p'_1(a_i) p'_2(b_i) \right) \left( \sum_j p''_1(\tilde{a}_j) p''_2(\tilde{b}_j) \right) \end{aligned}$$

für alle Zerlegungen von  $z, \tilde{z} \in \mathcal{A}^e$  und somit

$$\pi_{p,q} (z *_e \tilde{z}) \leq c \inf_i \left( \sum_i p'_1(a_i) p'_2(b_i) \right) \inf_j \left( \sum_j p''_1(\tilde{a}_j) p''_2(\tilde{b}_j) \right) = c \pi_{p'_1, p'_2} (z) p''_1 \otimes p''_2 (\tilde{z}).$$

Dies zeigt die Stetigkeit von  $*$  und folglich i.).

Für ii.) sei  $m \in \mathcal{M}$  und  $\mathcal{A}^e \ni z = \sum_i a_i \otimes b_i$ . Dann folgt für alle Zerlegungen  $\sum_i a_i \otimes b_i$  von  $z$ , dass

$$\begin{aligned} q(z *_e m) &= q \left( \sum_i a_i (m b_i) \right) \leq \sum_i q(a_i (m b_i)) \leq c \sum_i p_1(a_i) q'(m b_i) \\ &\leq \hat{c} \sum_i p_1(a_i) q''(m) p_2(b_i) = \hat{c} q''(m) \sum_i p_1(a_i) p_2(b_i) \end{aligned}$$

und somit  $p(zm) \leq \hat{c} \pi_{p_1, p_2}(z) q''(m)$ . ■

**Definition 2.1.5 (Topologischer Bar-Komplex)**

Gegeben eine lokalkonvexe, assoziative Algebra  $\mathcal{A}$ , so definieren wir den topologischen Bar-Komplex  $(X_c, d_c)$  durch die  $\mathcal{A}^e$ -Moduln

$$X_k^c = \mathcal{A} \otimes_\pi \underbrace{\mathcal{A} \otimes_\pi \dots \otimes_\pi \mathcal{A}}_{k\text{-mal}} \otimes_\pi \mathcal{A}$$

$$X_0 = \mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A}, \quad X_1 = \mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A}, \quad X_2 = \mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A} \otimes_\pi \mathcal{A}$$

mit  $\mathcal{A}^e$ -Multiplikation

$$(a \otimes b)(x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes x_{k+1}) := (ax_0) \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes (x_{k+1}b)$$

und  $\mathcal{A}^e$ -Homomorphismen

$$d_k^c: X_k^c \longrightarrow X_{k-1}^c$$

$$(x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1}) \longmapsto \sum_{j=0}^k (-1)^j x_0 \otimes \dots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1}$$

für  $k \geq 1$  mit  $d_k^c \circ d_{k+1}^c = 0$ .

Die relevanten Eigenschaften klärt folgende Proposition:

**Proposition 2.1.6**

i.) Die  $X_k^c$  sind lokalkonvexe  $\mathcal{A}^e$ -Moduln.

ii.) Die  $d_k^c$  sind stetig, ebenso die exaktheitsliefernde Homotopieabbildungen:

$$h_k^c: x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \longmapsto 1 \otimes x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1}.$$

iii.) Ist  $\mathcal{A}$  unitär und  $\mathcal{M}$  ein lokalkonvexer  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul, so gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*).$$

BEWEIS: i.) Sei  $z \in \mathcal{A}^e$  und  $x \in X_k^c$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} \pi_{p_0, \dots, p_{k+1}}(zx) &= \pi_{p_0, \dots, p_{k+1}} \left( \sum_i a_i \otimes b_i \cdot \sum_j x_0^j \otimes \dots \otimes x_{k+1}^j \right) \\ &\leq \sum_{i,j} p_0(a_i x_0^j) p_{k+1}(x_{k+1}^j b_i) \pi_{p_1, \dots, p_k}(x_1^j \otimes \dots \otimes x_k^j) \\ &\leq c \sum_{i,j} p'_0(a_i) p''_0(x_0^j) p'_{k+1}(x_{k+1}^j) p''_{k+1}(b_i) \pi_{p_1, \dots, p_k}(x_1^j \otimes \dots \otimes x_k^j) \\ &= c \sum_i p'_0(a_i) p''_{k+1}(b_i) \sum_j p''_0(x_0^j) \pi_{p_1, \dots, p_k}(x_1^j \otimes \dots \otimes x_k^j) p'_{k+1}(x_{k+1}^j). \end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\pi_{p_0, \dots, p_{k+1}}(zx) \leq c \pi_{p'_0, p''_{k+1}}(z) \pi_{p''_0, \dots, p'_{k+1}}(x)$$

und somit die Stetigkeit der Modul-Multiplikation. Die Stetigkeit der Addition in den  $X_k^c$  ist klar, da diese vermöge  $\pi_{k+2}$  topologische Vektorräume sind.

ii.) Mit der Stetigkeit von  $+$  sind wieder Summen stetiger Funktionen stetig und es reicht daher, die Stetigkeit der Abbildungen:

$$x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \mapsto x_0 \otimes \dots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1}$$

nachzuweisen. Wir erhalten diese mit dem üblichen Infimums-Argument aus

$$\begin{aligned} p_0 \otimes \dots \otimes p_k (x_0 \otimes \dots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1}) \\ \leq c p_0(x_0) \dots p'_i(x_i) p''_i(x_{i+1}) \dots p_k(x_{k+1}), \end{aligned}$$

oder unmittelbar mit Bemerkung 2.1.3. Die Stetigkeit der  $h_k^c$  folgt auf die gleiche Weise vermöge:

$$p \otimes p_0 \otimes \dots \otimes p_k (1 \otimes x_0 \otimes x_{k+1}) = p(1) p_0(x_0) \dots p_{k+1}(x_{k+1}).$$

iii.) Mit der Stetigkeit der  $d_k^c$  ist sofort einsichtig, dass in der Tat

$$d_{k+1}^{c*} : \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_k^c, \mathcal{M}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_{k+1}^c, \mathcal{M})$$

und somit  $(X_c^*, d_c^*)$  ein wohldefinierter Kokettenkomplex ist. Es bleibt dann lediglich nachzuweisen, dass die Isomorphismen  $\Xi^k$  aus Proposition 1.1.5, in beide Richtungen stetige auf stetige Homomorphismen abbilden. In der Tat sind dann deren Einschränkungen  $\Xi_c^k = \Xi^k|_{HC_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})}$  ebenfalls Isomorphismen und mit

$$\Xi_c^{k+1} d_{k+1}^{c*} = \delta_c^k \Xi_c^k$$

zudem Kettenabbildungen. Dies zeigt, dass die  $\widetilde{\Xi}_c^k$  Isomorphismen sind.

Für  $\Xi^k$  folgt die gewünschte Eigenschaft mit stetigem  $\psi$  aus:

$$\begin{aligned} q\left(\left(\Xi^k \psi\right)(\omega_k)\right) &= q\left(\psi(1 \otimes \omega_k \otimes 1)\right) \leq c \pi_{p_0, \dots, p_{k+1}}(1 \otimes \omega_k \otimes 1) \\ &= \underbrace{c p_0(1) p_{k+1}(1)}_{\hat{c}} \pi_{p_1, \dots, p_k}(\omega_k). \end{aligned}$$

Umgekehrt erhalten wir für  $\phi \in HC_{\text{cont}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  mit Lemma 2.1.4 ii.):

$$\begin{aligned} q(x_0 \otimes x_{k+1} *_e \phi(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)) &\leq c \pi_{p_0, p_{k+1}}(x_0 \otimes x_{k+1}) q'(\phi(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)) \\ &\leq \hat{c} \prod_{i=0}^{k+1} p_i(x_i). \end{aligned} \quad \blacksquare$$



## 2.2. Die stetige Hochschild-Kohomologie der Algebra $S^\bullet(\mathbb{V})$

In diesem Abschnitt wollen wir die stetige Hochschild-Kohomologie der Algebra  $S^\bullet(\mathbb{V})$  berechnen. Hierfür ist es zunächst notwendig, diese mit einer lokalkonvexen Topologie derart auszustatten, dass die Algebrenmultiplikation  $\vee$  stetig ist. Sei hierfür  $(\mathbb{V}, P)$  ein lokalkonvexer Vektorraum und bezeichne  $\tilde{P}$  das filtrierende System aller bezüglich  $\mathcal{T}_P$  stetigen Halbnormen<sup>2</sup>. Für jedes  $p \in \tilde{P}$  und jede positive Konstante  $|c| > 0$  ist dann insbesondere die Halbnorm  $|c|p$  in  $\tilde{P}$  enthalten.

Jedes  $S^l(\mathbb{V})$  sei nun  $\pi_l$ -topologisiert bezüglich des Halbnormensystemes  $\tilde{P}$ . Dann ist es insbesondere ausreichend, das Teilsystem  $\{p^l\}_{p \in \tilde{P}} = \{\pi_{p, \dots, p}\}_{p \in \tilde{P}} \subseteq \tilde{P}$  zu betrachten. Denn mit der Filtrationseigenschaft existiert zu jedem Satz von Halbnormen  $p_1, \dots, p_l \in \tilde{P}$  ein  $p \in \tilde{P}$  derart, dass  $p \geq p_i \forall 1 \leq i \leq l$  und folglich

$$p_1 \otimes \dots \otimes p_l \leq \overbrace{p \otimes \dots \otimes p}^{l\text{-mal}} = p^l$$

gilt. Ebenso zeigt man die umgekehrte Abschätzbarkeit, und da besagtes Teilsystem ebenfalls filtrierend ist, zeigt Korollar B.1.5 *iv.*), dass beide Halbnormensysteme die selbe Topologie auf  $S^l(\mathbb{V})$  definieren. Diese ist gerade die durch  $(T^l(\mathbb{V}), \pi_l)$  auf  $S^l(\mathbb{V})$  induzierte Teilraumtopologie.

Um nun die direkte Summe, also  $S^\bullet(\mathbb{V})$  lokalkonvex zu topologisieren, betrachten wir das auf  $T^\bullet(\mathbb{V})$  und somit auch auf  $S^\bullet(\mathbb{V})$  definierte System  $\mathfrak{P}$ , bestehend aus den Halbnormen

$$\mathfrak{p}: \sum_l \omega_l \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} p^l(\omega_l)$$

mit  $p^0 = \|\cdot\|_{\mathbb{K}}$ . Dieses ist ebenfalls filtrierend und insbesondere ist klar, dass dann die Teilraumtopologien auf den  $S^l(\mathbb{V})$  gerade mit den  $\pi_l$ -Topologien übereinstimmen. Des

Weiteren sei darauf hingewiesen, dass die Halbnormen  $\tilde{\mathfrak{p}} = \sum_{l=0}^{\infty} p_i^l$  mit paarweise ver-

schiedenen  $p_i \in \tilde{P}$  in der Tat eine andere Topologie definieren, da die Summe nicht endlich ist und wir im Allgemeinen kein  $p \in \tilde{P}$  derart finden, dass  $p \geq p_i \forall i \in \mathbb{N}$ . Den Hauptgrund für unsere Wahl liefert das nächste Lemma. Essentiell an besagtem Halbnormensystem ist zudem, dass mit  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ , per Konstruktion, ebenfalls die Halbnorm

$$\mathfrak{p}_c(v) = \sum_{l=0}^{\infty} |c|^l p^l$$

in  $\mathfrak{P}$  enthalten ist. Dies wird für spätere Stetigkeitsabschätzungen von hohem Nutzen sein. Das folgende Lemma macht  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \vee)$  schließlich zu einer lokalkonvexen Algebra:

---

<sup>2</sup>vgl. Korollar B.1.5 *ii.*)

**Lemma 2.2.1**

Vermöge  $\vee$  wird  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathfrak{P})$  zu einer assoziativen, unitären, lokalkonvexen Algebra mit submultiplikativem Halbnormensystem.

BEWEIS: Zunächst erinnern wir, dass eine lokalkonvexe Algebra  $(\mathcal{A}, *, P)$  submultiplikativ genannt wird, falls  $p(a * b) \leq p(a) p(b)$  für alle  $a, b \in \mathcal{A}$  und alle  $p \in P$ . Da dies insbesondere die Stetigkeit von  $*$  impliziert, reicht es, diese Relation für  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \vee, \mathfrak{P})$  nachzuweisen.

Zunächst erhalten wir

$$\begin{aligned} p(\otimes^\bullet(\alpha, \beta)) &= p\left(\sum_{l,m} \alpha_l \otimes \beta_m\right) = \sum_k p^k\left(\sum_{l+m=k} \alpha_l \otimes \beta_m\right) \\ &\leq \sum_{l,m} p^{l+m}(\alpha_l \otimes \beta_m) \leq \sum_{l,m,i_l,j_m} p^{l+m}(\alpha_l^{i_l} \otimes \beta_m^{j_m}) \\ &= \sum_{l,m,i_l,j_m} p^l(\alpha_l^{i_l}) p^m(\beta_m^{j_m}) = \left(\sum_{l,i_l} p^l(\alpha_l^{i_l})\right) \left(\sum_{m,j_m} p^m(\beta_m^{j_m})\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

für alle Zerlegungen  $T^l(\mathbb{V}) \ni \alpha_l = \sum_{i_l} \alpha_l^{i_l}$  in separable  $\alpha_l^{i_l}$  und  $T^m(\mathbb{V}) \ni \beta_m = \sum_{j_m} \beta_m^{j_m}$  in separable  $\beta_m^{j_m}$ . Dies zeigt

$$\begin{aligned} p(\otimes^\bullet(\alpha, \beta)) &\leq \left[\sum_l \inf\left(\sum_i p^l(\alpha_l^i)\right)\right] \left[\sum_m \inf\left(\sum_j p^m(\beta_m^j)\right)\right] \\ &= p\left(\sum_l \alpha_l\right) p\left(\sum_m \beta_m\right), \end{aligned}$$

wobei wieder das Infimum über alle Zerlegungen von  $\alpha_l$  und  $\beta_m$  gemeint ist.

Für  $S: T^\bullet(\mathbb{V}) \longrightarrow S^\bullet(\mathbb{V}) \subseteq T^\bullet(\mathbb{V})$  folgt

$$p^l(\text{Sym}_l(\alpha_l)) = p^l\left(\frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} \sigma^* \alpha_l\right) \leq \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} p^l(\alpha_l) = p^l(\alpha_l),$$

womit

$$p(S(\alpha)) = p\left(\sum_l \text{Sym}_l(\alpha_l)\right) = \sum_l p^l(\text{Sym}_l(\alpha_l)) \leq \sum_l p^l(\alpha_l) = p(\alpha).$$

Mit  $\vee = S \circ \otimes^\bullet$  (vgl. Abschnitt 1.3) zeigt dies

$$p(\alpha \vee \beta) = p((S \circ \otimes^\bullet)(\alpha, \beta)) \leq p(\otimes^\bullet(\alpha, \beta)) \leq p(\alpha) p(\beta)$$

für alle  $\alpha, \beta \in T^\bullet(\mathbb{V})$  und somit die Behauptung, da obige Ungleichung dann insbesondere für alle  $\alpha, \beta \in S^\bullet(\mathbb{V}) \subseteq T^\bullet(\mathbb{V})$  korrekt ist. ■

Als Resultat dieses Lemmas erhalten wir mit Proposition 2.1.6 iii.), dass

$$HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*)$$

für jeden lokalkonvexen  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ - Bimodul  $\mathcal{M}$ . Hierbei bezeichnet  $X_c$  den zu  $S^\bullet(\mathbb{V})$  gehörigen, topologischen Bar-Komplex mit  $\mathcal{A}^e = S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi S^\bullet(\mathbb{V})$ .

Wir wollen nun den in Abschnitt 1.3 betrachteten Koszul-Komplex in geeigneter Weise derart topologisieren, dass die Kettendifferentiale  $\partial_k$  stetige Abbildungen sind und wir somit in wohlbegründeter Weise vom topologischen Koszul-Komplex  $(\mathcal{K}_c, \partial_c)$  und folglich auch vom stetigen Kokettenkomplex  $(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}), \partial_c^*)$  sprechen dürfen. Des Weiteren werden wir nachweisen, dass dann unsere Kettenabbildungen  $F$  und  $G$  in den gegebenen Topologien ebenfalls stetig sind und somit Kettenabbildungen zwischen  $(X_c^*, d_c^*)$  und  $(\mathcal{K}_c^*, \partial_c^*)$  induzieren.

### Definition 2.2.2 (Topologischer Koszul-Komplex)

Den Koszul-Komplex aus 1.3 vor Augen, definieren wir die topologischen Räume

$$\mathcal{K}_k^c = S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi \Lambda^k(\mathbb{V})$$

und erhalten ein erzeugendes System  $\mathfrak{P}_k$ , vermöge den Halbnormen:

$$\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p} \otimes \mathfrak{p} \otimes p^k = \mathfrak{p}^2 \otimes p^k.$$

Mit  $\partial_k^c$  bezeichnen wir die durch Definition 1.3.1 auf den  $\mathcal{K}_k^c$  induzierten Homomorphismen, von denen wir im Folgenden nachweisen werden, dass sie stetig sind.  $T_k^c \supseteq \mathcal{K}_k^c$  sei der mit selbigem Halbnormensystem ausgestatteten Raum

$$T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi T^k(\mathbb{V}),$$

der obige Topologie als Teilraumtopologie auf  $\mathcal{K}_k^c$  induziert.

### Bemerkung 2.2.3

Will man die Stetigkeit einer Abbildung  $\phi: \mathcal{K}_k^c \rightarrow \mathcal{K}_{k'}^c$  nachweisen, so reicht es, diese für eine Abbildung  $\tilde{\phi}: T_k^c \rightarrow T_{k'}^c$  zu zeigen, die  $\phi$  auf  $\mathcal{K}_k^c$  induziert, für die also  $\tilde{\phi}|_{\mathcal{K}_k^c} = \phi$  gilt. Dies sieht man sofort daran, dass die Stetigkeitsabschätzungen für  $\tilde{\phi}$  insbesondere für die besagten Unterräume gültig sind.

### Proposition 2.2.4

- i.) Eine lineare Abbildung  $\phi: T_k^c \rightarrow T_{k'}^c$  ist genau dann stetig, wenn für jedes  $\mathfrak{q}_{k'} \in \mathfrak{P}_{k'}$  ein  $\mathfrak{p}_k \in \mathfrak{P}_k$  derart existiert, dass

$$\mathfrak{q}_{k'}(\phi(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u)) \leq c \mathfrak{p}_k(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \quad (2.4)$$

für alle separablen  $\alpha_l \in T^l(\mathbb{V})$ ,  $\beta_m \in T^m(\mathbb{V})$  und  $u \in T^k(\mathbb{V})$  gilt.

- ii.) Es sind alle  $\partial_k^c$  stetig.

iii.) Es sind alle  $h_k$  stetig.

iv.) Es sind alle  $F_k$  stetig.

v.) Es sind alle  $G_k$  stetig.

BEWEIS: i.) Ist  $\phi$  stetig, so gilt besagte Relation sogar für alle Elemente in  $T_c^k$ .

Für die umgekehrte Richtung sei  $\alpha \otimes \beta \otimes u \in T_k^c$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{k'}(\phi(\alpha \otimes \beta \otimes u)) &= \mathfrak{q}_{k'} \left( \sum_{l,m,i_l,j_m,s} \phi(\alpha_l^{i_l} \otimes \beta_m^{j_m} \otimes u^s) \right) \\ &\leq \sum_{l,m,i_l,j_m,s} \mathfrak{q}_{k'}(\phi(\alpha_l^{i_l} \otimes \beta_m^{j_m} \otimes u^s)) \\ &\leq \sum_{l,m,i_l,j_m,s} c \, \mathfrak{p}_k(\alpha_l^{i_l} \otimes \beta_m^{j_m} \otimes u^s) \\ &= c \sum_{l,m,i_l,j_m,s} p^l(\alpha_l^{i_l}) p^m(\beta_m^{j_m}) p^k(u^s) \end{aligned}$$

für alle Zerlegungen von  $\alpha_l, \beta_m$  und  $u$  in separable Summanden  $\alpha_l^{i_l}, \beta_m^{j_m}, u^s$ . Dies zeigt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{k'}(\phi(\alpha \otimes \beta \otimes u)) &\leq c \sum_l \inf \left( \sum_i p^l(\alpha_l^i) \right) \sum_m \inf \left( \sum_i p^m(\beta_m^i) \right) \inf \left( \sum_s (p^k(u^s)) \right) \\ &= c \, \mathfrak{p}(\alpha) \mathfrak{p}(\beta) p^k(u), \end{aligned}$$

also die Stetigkeit von  $\phi \circ \otimes_3$  und somit die von  $\phi$  in  $\pi_3$ .

ii.) In Abschnitt 1.3 hatten wir eingesehen, dass

$$\begin{aligned} (S \otimes S \otimes A) \circ \tilde{\partial}_1^k \Big|_{\mathcal{K}_k^c} &= \partial_1^k \\ (S \otimes S \otimes A) \circ \tilde{\partial}_2^k \Big|_{\mathcal{K}_k^c} &= \partial_2^k. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die zusätzlichen Symmetrisierungen und Antisymmetrisierungen aus reiner Bequemlichkeit eingefügt, was wegen  $S|_{S^\bullet(V)} = \text{id}_{S^\bullet(V)}$  und  $A|_{\Lambda^\bullet(V)} = \text{id}_{\Lambda^\bullet(V)}$  ohne weiteres möglich ist.

Nun ist  $S \otimes S \otimes A$  stetig in  $T_k^c$  nach i.), denn für  $\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u \in T_k^c$  mit separablen Faktoren folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_k((S \otimes S \otimes A)(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u)) &= \mathfrak{p}_k(S(\alpha_l) \otimes S(\beta_m) \otimes A(u)) \\ &= p^l(S(\alpha_l)) p^m(S(\beta_m)) p^k(A(u)) \\ &\leq p^l(\alpha_l) p^m(\beta_m) p^k(u) \\ &= \mathfrak{p}_k(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u). \end{aligned}$$

Es bleiben die Stetigkeiten von  $\tilde{\partial}_1^k$  und  $\tilde{\partial}_2^k$  zu zeigen. Diese folgen mit *i.*) und

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{k-1} \left( \tilde{\partial}_1^k (\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \right) &= k \mathfrak{p}_{k-1} (u_1 \otimes \alpha_l \otimes \beta_m \otimes u^1) \\ &= k p^{l+1}(u_1 \otimes \alpha_l) p^m(\beta_m) p^{k-1}(u^1) \\ &= k p^l(\alpha_l) p^m(\beta_m) p^k(u) \\ &= k \mathfrak{p}_k(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \end{aligned}$$

sowie einer analogen Rechnung für  $\tilde{\partial}_2^k$ . Bemerkung 2.2.3 zeigt dann die Stetigkeit von  $\partial_1^k$  und  $\partial_2^k$  und folglich die von  $\partial_k^c$ .

iii.) Wir erinnern, dass  $h_k = \int_0^1 dt t^k i_t \circ \delta$ , und zeigen zunächst die Stetigkeit von  $\delta$ . Nun war  $(S \otimes S \otimes A) \circ \tilde{\delta}|_{\mathcal{K}_k^c} = \delta$  mit

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}: T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow T^{\bullet-1}(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^{k+1}(\mathbb{V}) \\ \alpha_l \otimes \beta \otimes u &\longmapsto l (\alpha_l^1 \otimes \beta \otimes (\alpha_l)_1 \otimes u), \end{aligned}$$

und für separable  $\alpha_l \in T^l(\mathbb{V})$ ,  $\beta_m \in T^m(\mathbb{V})$  sowie  $u \in T^k(\mathbb{V})$  folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{k+1} \left( \tilde{\delta}(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \right) &= \mathfrak{p}^2 (l \alpha_l^1 \otimes \beta_m) p^{k+1}((\alpha_l)_1 \otimes u) \\ &= l p^l(\alpha_l) p^m(\beta_m) p^k(u) \\ &\leq 2^l 2^m 2^k p^l(\alpha_l) p^m(\beta_m) p^k(u) \\ &= \hat{p}^l(\alpha_l) \hat{p}^m(\beta_m) \hat{p}^k(u) \\ &= \hat{\mathfrak{p}}_k(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \end{aligned}$$

mit  $\hat{p} = 2p$ . Bemerkung 2.2.3 sowie *i.*) zeigen die Stetigkeit von  $\delta$ .

Um die Stetigkeit von  $\int_0^1 dt t^k i_t$  nachzuweisen, erinnern wir daran, dass

$$\int_0^1 dt t^k i_t = \left[ (S \otimes S \otimes A) \circ \int_0^1 dt t^k \underbrace{\left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^l \eta_t^{l,s} \right]}_{\hat{i}_t} \right] \Big|_{\mathcal{K}_k^c}$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_t^{l,s}: T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) &\longrightarrow T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) \\ \alpha_l \otimes \beta \otimes u &\longmapsto \binom{l}{s} t^{l-s} (1-t)^s \alpha_l^{1,\dots,s} \otimes (\alpha_l)_{1,\dots,s} \otimes \beta \otimes u. \end{aligned}$$

Wir rechnen für separable  $\alpha_l$ ,  $\beta_m$  und  $u$ :

$$\mathfrak{p}_k \left( \int_0^1 dt t^k \hat{i}_t (\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \right) = \mathfrak{p}_k \left( \int_0^1 dt t^k \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l'} \eta_t^{l',s} (\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathfrak{p}_k \left( \int_0^1 dt t^k \sum_{s=0}^l \eta_t^{l,s} (\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u) \right) \\
 &= \mathfrak{p}_k \left( \sum_{s=0}^l \underbrace{\int_0^1 dt t^k t^{l-s} (1-t)^s}_{\tau_s^l} \binom{l}{s} (\alpha_l^{1,\dots,s} \otimes (\alpha_l)_{1,\dots,s} \otimes \beta_m \otimes u) \right) \\
 &= \mathfrak{p}^2 \left( \sum_{s=0}^l \tau_s^l \alpha_l^{1,\dots,s} \otimes (\alpha_l)_{1,\dots,s} \otimes \beta_m \right) p^k(u) \\
 &\leq \sum_{s=0}^l \tau_s^l \mathfrak{p}^2 \left( \alpha_l^{1,\dots,s} \otimes (\alpha_l)_{1,\dots,s} \otimes \beta_m \right) p^k(u) \\
 &= \sum_{s=0}^l \tau_s^l p^{l-s} \left( \alpha_l^{1,\dots,s} \right) p^s \left( (\alpha_l)_{1,\dots,s} \otimes \beta_m \right) p^k(u) \\
 &= \left[ \sum_{s=0}^l \tau_s^l \right] p^l(\alpha_l) p^m(\beta_m) p^k(u) \\
 &= \frac{1}{k+1} \mathfrak{p}_k(\alpha_l \otimes \beta_m \otimes u).
 \end{aligned}$$

In der Tat erhalten wir die letzte Gleichheit mit

$$\sum_{s=0}^l \tau_s^l = \int_0^1 dt t^k \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} t^{l-s} (1-t)^s = \int_0^1 dt t^k [t + (1-t)]^l = \int_0^1 dt t^k = \frac{1}{k+1}.$$

Die Stetigkeit von  $\int_0^1 dt t^k i_t$  folgt abermals mit *i.)* und Bemerkung 2.2.3 liefert schließlich die Behauptung.

*iv.)* Es ist  $F_k = \tilde{F}_k|_{\mathcal{K}_k^c}$  für

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_k: \mathcal{T}_k^c &\longrightarrow \bigotimes^{k+2} \mathcal{T}^\bullet(\mathbb{V}) \\
 \alpha \otimes \beta \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k &\longmapsto k! (\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{p}^{k+2} \left( \tilde{F}_k(\alpha \otimes \beta \otimes u) \right) &= k! \mathfrak{p}^{k+2} \left( \sum_{l,m,i_l,j_m,i} \alpha_l^{i_l} \otimes u_1^i \otimes \dots \otimes u_k^i \otimes \beta_m^{j_m} \right) \\
 &\leq k! \sum_{l,m,i_l,j_m,i} \mathfrak{p}^{k+2} \left( \alpha_l^{i_l} \otimes u_1^i \otimes \dots \otimes u_k^i \otimes \beta_m^{j_m} \right) \\
 &= k! \sum_{l,m,i_l,j_m,i} p^l \left( \alpha_l^{i_l} \right) p \left( u_1^i \right) \dots p \left( u_k^i \right) p^m \left( \beta_m^{j_m} \right)
 \end{aligned}$$

$$= k! \left( \sum_{l, i_l} p^l (\alpha_{i_l}^i) \right) \left( \sum_{m, j_m} p^m (\beta_{j_m}^i) \right) \left( \sum_i p^k (u^i) \right)$$

für alle Zerlegungen der  $\alpha_l, \beta_m$  und von  $u$ . Hiermit folgt

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p}^{k+2} \left( \tilde{F}_k(\alpha \otimes \beta \otimes u) \right) \\ & \leq k! \sum_l \inf \left( \sum_i p^l (\alpha_{i_l}^i) \right) \sum_m \inf \left( \sum_i p^l (\beta_{j_m}^i) \right) \inf \left( \sum_i p^k (u^i) \right) \\ & = k! \mathfrak{p}(\alpha) \mathfrak{p}(\beta) p^k(u), \end{aligned}$$

also die Stetigkeit von  $\tilde{F}_k$  in  $\pi_3$ . Die von  $F_k$  folgt analog zu Bemerkung 2.2.3, da obige Ungleichung insbesondere für alle Elemente aus  $\mathcal{K}_k^c$  korrekt ist.

v.) Wir zeigen dies wieder schrittweise. Sei hierfür  $\bigotimes^{k+2} T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V})$  topologisiert vermöge den Halbnormen  $\mathfrak{p}^{k+2} \otimes p^k$  und  $\bigotimes^{k+2} T^\bullet(\mathbb{V})$  vermöge  $\mathfrak{p}^{k+2}$ . Wir definieren sinngemäß zu Definition 1.3.10 iv):

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_k: \bigotimes^{k+2} T^\bullet(\mathbb{V}) & \longrightarrow \bigotimes^{k+2} T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V}) \\ \alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta & \longmapsto \left[ \prod_{i=1}^k n_i \right] \alpha \otimes u_1^1 \otimes \dots \otimes u_k^1 \otimes \beta \otimes (u_1)_1 \otimes \dots \otimes (u_k)_1 \end{aligned}$$

für  $\deg(u_i) = n_i$  und  $\tilde{\delta}_k(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_{j-1} \otimes 1 \otimes u_{j+1} \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta) = 0$ , womit

$$\delta = \left( \bigotimes^{k+2} \text{id} \otimes A \circ \tilde{\delta}_k \right) \Big|_{X_k^c}.$$

Für die Stetigkeit von  $\tilde{\delta}_k$  sei  $\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta \in T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \bigotimes_{n=1}^k T^{n_k}(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V})$  mit  $u_i$  für  $1 \leq i \leq k$  separabel. Dann folgt

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{p}^{k+2} \otimes p^k) \left( \tilde{\delta}(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta) \right) \\ & = (\mathfrak{p}^{k+2} \otimes p^k) \left( \left[ \prod_{i=1}^k n_i \right] \alpha \otimes u_1^1 \otimes \dots \otimes u_k^1 \otimes \beta \otimes (u_1)_1 \otimes \dots \otimes (u_k)_1 \right) \\ & = \left[ \prod_{i=1}^k n_i \right] \mathfrak{p}(\alpha) \mathfrak{p}(u_1^1) \dots \mathfrak{p}(u_k^1) \mathfrak{p}(\beta) p^k((u_1)_1 \otimes \dots \otimes (u_k)_1) \\ & = \left[ \prod_{i=1}^k n_i \right] \mathfrak{p}(\alpha) p^{n_1-1}(u_1^1) \dots p^{n_k-1}(u_k^1) \mathfrak{p}(\beta) p^k((u_1)_1 \otimes \dots \otimes (u_k)_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \prod_{i=1}^k n_i \right] \mathfrak{p}(\alpha) p^{n_1}(u_1) \dots p^{n_k}(u_k) \mathfrak{p}(\beta) \\
 &\leq \tilde{\mathfrak{p}}(\alpha) \tilde{p}^{n_1}(u_1) \dots \tilde{p}^{n_k}(u_k) \tilde{\mathfrak{p}}(\beta) \\
 &= \tilde{\mathfrak{p}}^{k+2}(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta)
 \end{aligned}$$

mit  $\tilde{p} = 2p$ . Den allgemeinen Fall erhalten wir vermöge obiger Ungleichung mit

$$\begin{aligned}
 &(\mathfrak{p}^{k+2} \otimes p^k) \left( \tilde{\delta}(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta) \right) \\
 &= (\mathfrak{p}^{k+2} \otimes p^k) \left( \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \\ i_{n_1}, \dots, i_{n_k}}} \tilde{\delta} \left( \alpha \otimes (u_1)_{n_1}^{i_{n_1}} \otimes \dots \otimes (u_k)_{n_k}^{i_{n_k}} \otimes \beta \right) \right) \\
 &\leq \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \\ i_{n_1}, \dots, i_{n_k}}} (\mathfrak{p}^{k+2} \otimes p^k) \left( \tilde{\delta} \left( \alpha \otimes (u_1)_{n_1}^{i_{n_1}} \otimes \dots \otimes (u_k)_{n_k}^{i_{n_k}} \otimes \beta \right) \right) \\
 &\leq \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \\ i_{n_1}, \dots, i_{n_k}}} \tilde{\mathfrak{p}}^{k+2} \left( \alpha \otimes (u_1)_{n_1}^{i_{n_1}} \otimes \dots \otimes (u_k)_{n_k}^{i_{n_k}} \otimes \beta \right) \\
 &= \tilde{\mathfrak{p}}(\alpha) \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \\ i_{n_1}, \dots, i_{n_k}}} \tilde{p}^{n_1} \left( (u_1)_{n_1}^{i_{n_1}} \right) \dots \tilde{p}^{n_k} \left( (u_k)_{n_k}^{i_{n_k}} \right) \tilde{\mathfrak{p}}(\beta) \\
 &= \tilde{\mathfrak{p}}(\alpha) \left( \sum_{n_1} \sum_{i_{n_1}} \tilde{p}^{n_1} \left( (u_1)_{n_1}^{i_{n_1}} \right) \right) \dots \left( \sum_{n_k} \sum_{i_{n_k}} \tilde{p}^{n_k} \left( (u_k)_{n_k}^{i_{n_k}} \right) \right) \tilde{\mathfrak{p}}(\beta)
 \end{aligned}$$

für alle Zerlegungen der  $(u_i)_{n_i} \in T^{n_i}(\mathbb{V})$ , und es folgt

$$(\mathfrak{p}^{k+2} \otimes p^k) \left( \tilde{\delta}(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta) \right) \leq \tilde{\mathfrak{p}}(\alpha) \tilde{\mathfrak{p}}(u_1) \dots \tilde{\mathfrak{p}}(u_k) \tilde{\mathfrak{p}}(\beta).$$

Dies zeigt die Stetigkeit von  $\tilde{\delta}$  in  $\pi_{k+2}$ , und mit dem üblichen Teilraumargument ebenso die von  $\delta$ .

Um die Stetigkeit von  $\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k i_{t_1, \dots, t_k}$  nachzuweisen, definieren wir

$$\begin{aligned}
 \eta^{m,l}: T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^m(\mathbb{V}) \otimes T^\bullet(\mathbb{V}) &\longrightarrow \bigotimes^2 T^\bullet(\mathbb{V}) \\
 \alpha \otimes u \otimes \beta &\longmapsto u^{1, \dots, l} \otimes \alpha \otimes u_{1, \dots, l} \otimes \beta
 \end{aligned}$$

mit  $l \leq m$  sowie  $\eta^{0,0}(\alpha \otimes 1 \otimes \beta) = (\alpha \otimes \beta)$ . Dann folgt für

$$\hat{i}_t' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} t^{m-l} (1-t)^l \eta^{m,l}$$



sowie

$$\tilde{i}_{t_1, \dots, t_k}(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta \otimes \omega) = \alpha \otimes \beta *_e \left[ \prod_{s=1}^k \hat{i}'_{t_s}(1 \otimes u_s \otimes 1) \right] \otimes \omega$$

mit  $\prod$  das Produkt  $(\alpha \otimes u \otimes \beta) \cdot (\alpha' \otimes u' \otimes \beta') = \alpha \otimes \alpha' \otimes u \otimes u' \otimes \beta \otimes \beta'$  und  $\alpha \otimes \beta *_e \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} \otimes \omega = \alpha \otimes \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} \otimes \beta \otimes \omega$ , dass

$$i_{t_1, \dots, t_k} = \left[ (S \otimes S \otimes \text{id}) \circ \tilde{i}_{t_1, \dots, t_k} \right] \Big|_{\otimes^{k+2} S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes \Lambda^k(\mathbb{V})}.$$

Sei nun  $\alpha_p \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta_q \otimes \omega \in \bigotimes^{k+2} T^\bullet(\mathbb{V}) \otimes T^k(\mathbb{V})$  mit  $\deg(u_i) = p_i$ ,  $\deg(\alpha_p) = p$  und  $\deg(\beta_q) = q$ . Für  $\alpha_p, \beta_q, u_i$  separabel und  $\omega \in T^k(\mathbb{V})$  beliebig erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p}_k \left( \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \tilde{i}_{t_1, \dots, t_k}(\alpha_p \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta_q \otimes \omega) \right) \\ &= \mathfrak{p}^2 \left( \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \alpha_p \otimes \beta_q *_e \prod_{i=1}^k \hat{i}'_{t_i}(1 \otimes u_i \otimes 1) \right) p^k(\omega) \\ &= p^k(\omega) \mathfrak{p}^2 \left( \alpha_p \otimes \beta_q *_e \left[ \underbrace{\sum_{\substack{m_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}} \sum_{\substack{l_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \prod_{i=1}^k \binom{m_i}{l_i} t_i^{m_i-l_i} (1-t_i)^{l_i}}_{\tau_{l_1, \dots, l_k}^{m_1, \dots, m_k}} \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \eta^{m_i, l_i}(1 \otimes u_i \otimes 1) \right] \right) \\ &= p^k(\omega) \mathfrak{p}^2 \left( \alpha_p \otimes \beta_q *_e \left[ \sum_{\substack{l_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}}^{p_i} \tau_{l_1, \dots, l_k}^{p_1, \dots, p_k} \prod_{i=1}^k u_i^{1, \dots, l_i} \otimes (u_i)_{1, \dots, l_i} \right] \right) \\ &= p^k(\omega) \mathfrak{p}^2 \left( \sum_{\substack{l_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}}^{p_i} \tau_{l_1, \dots, l_k}^{p_1, \dots, p_k} \alpha_p \otimes u_1^{1, \dots, l_1} \otimes \dots \otimes u_k^{1, \dots, l_k} \otimes \beta_q \otimes (u_1)_{1, \dots, l_1} \otimes \dots \otimes (u_k)_{1, \dots, l_k} \right) \\ &\leq p^k(\omega) \sum_{\substack{l_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}}^{p_i} \tau_{l_1, \dots, l_k}^{p_1, \dots, p_k} \mathfrak{p}^2 \left( \alpha_p \otimes u_1^{1, \dots, l_1} \otimes \dots \otimes u_k^{1, \dots, l_k} \otimes \beta_q \otimes (u_1)_{1, \dots, l_1} \otimes \dots \otimes (u_k)_{1, \dots, l_k} \right) \\ &= p^k(\omega) \sum_{\substack{l_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}}^{p_i} \tau_{l_1, \dots, l_k}^{p_1, \dots, p_k} p^p(\alpha_p) p^{p_1-l_1} \left( u_1^{1, \dots, l_1} \right) \dots p^{p_k-l_k} \left( u_k^{1, \dots, l_k} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad p^q(\beta_q) p^{l_1} \left( (u_1)_{1, \dots, l_1} \right) \dots p^{l_k} \left( (u_k)_{1, \dots, l_k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p^k(\omega) \left[ \sum_{\substack{l_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}}^{p_i} \tau_{p_1, \dots, p_k}^{p_1, \dots, p_k} \right] p^p(\alpha_p) p^{p_1}(u_1) \dots p^{p_k}(u_k) p^q(\beta_q) \\
 &= \frac{1}{k!} (p^{k+2} \otimes p^k)(\alpha_p \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta_q \otimes \omega).
 \end{aligned}$$

In der Tat erhalten wir die letzte Gleichheit mit:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{l_i=0 \\ 1 \leq i \leq k}}^{p_i} \tau_{p_1, \dots, p_k}^{l_1, \dots, l_k} &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \prod_{i=1}^k \sum_{l_i=0}^{p_i} \binom{p_i}{l_i} t^{p_i-l_i} (1-t_i)^{l_i} \\
 &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k = \frac{1}{k!}.
 \end{aligned}$$

Sei  $\phi = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \tilde{\tau}_{t_1, \dots, t_k}$ , so folgt für beliebige  $\alpha = \sum_p \alpha_p$ ,  $\beta = \sum_q \beta_q$  und  $u_i = \sum_i (u_i)_{p_i}$  mit  $\alpha_p \in T^p(\mathbb{V})$ ,  $\beta_q \in T^q(\mathbb{V})$  sowie  $(u_i)_{p_i} \in T^{p_i}(\mathbb{V})$ :

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{p}_k(\phi(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta \otimes \omega)) \\
 &= \mathfrak{p}_k \left( \sum_{\substack{p, q, p_j \\ i_0, \dots, i_{k+1}}} \phi(\alpha_p^{i_0} \otimes (u_1)_{p_1}^{i_1} \otimes \dots \otimes (u_k)_{p_k}^{i_k} \otimes \beta_q^{i_{k+1}} \otimes \omega) \right) \\
 &\leq \sum_{\substack{p, q, p_j \\ i_0, \dots, i_{k+1}}} \mathfrak{p}_k(\phi(\alpha_p^{i_0} \otimes (u_1)_{p_1}^{i_1} \otimes \dots \otimes (u_k)_{p_k}^{i_k} \otimes \beta_q^{i_{k+1}} \otimes \omega)) \\
 &\leq \sum_{\substack{p, q, p_j \\ i_0, \dots, i_{k+1}}} (p^{k+2} \otimes p^k)(\alpha_p^{i_0} \otimes (u_1)_{p_1}^{i_1} \otimes \dots \otimes (u_k)_{p_k}^{i_k} \otimes \beta_q^{i_{k+1}} \otimes \omega) \\
 &= \left( \sum_{p, i_0} p^p(\alpha_p^{i_0}) \right) \left( \sum_{p_1, i_1} p^{p_1}((u_1)_{p_1}^{i_1}) \right) \dots \left( \sum_{p_k, i_k} p^{p_k}((u_k)_{p_k}^{i_k}) \right) \left( \sum_{q, i_{k+1}} p^q(\beta_q^{i_{k+1}}) \right) p^k(\omega),
 \end{aligned}$$

und somit

$$\mathfrak{p}_k(\phi(\alpha \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes \beta \otimes \omega)) \leq \mathfrak{p}(\alpha) \mathfrak{p}(u_1) \dots \mathfrak{p}(u_k) \mathfrak{p}(\beta) p^k(\omega). \quad \blacksquare$$

Wir befinden uns nun in folgender Situation:

### Bemerkung 2.2.5

Mit Proposition 2.2.4 ii.) ist der Kokettenkomplex  $(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}), \partial_c^*)$  ein Unterkomplex von  $(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M}), \partial^*)$ , und ebenso war  $(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{A}), d_c^*)$  ein Unterkomplex von  $(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X, \mathcal{A}), d^*)$ . Mit Proposition 2.2.4 sind  $F$  und  $G$  stetige Kettenabbildungen. Folglich bilden  $F^*$  und  $G^*$  stetige auf stetige Homomorphismen ab und definieren somit Kettenabbildungen  $F^k = F_k^*|_{X_k^*}$  und  $G^k = G_k^*|_{\mathcal{K}_k^*}$  zwischen obigen stetigen Unterkomplexen. Nach Bemerkung 1.3.15 i.) bedeutet dies die Injektivität von  $\widetilde{F}^k$  und die Surjektivität von  $G^k$ .

Für die umgekehrte Aussage nehmen wir an, die Kettenabbildung  $\Omega = F \circ G$  mit  $\Omega_k = F_k \circ G_k: X_k \mapsto X_k$  und

$$\Omega_k \circ d_{k+1} = d_{k+1} \circ \Omega_{k+1} \quad (2.5)$$

wäre homotop zu der Identität auf  $X$ , vermöge einer stetigen,  $\mathcal{A}^e$ -linearen Homotopie  $s$ . Dies war eine Familie von stetigen  $\mathcal{A}^e$ -Homomorphismen  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $s_k: X_k^c \rightarrow X_{k+1}^c$  derart, dass:

$$F_k \circ G_k - \text{id}_{X_k} = d_{k+1}s_k + s_{k-1}d_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

gilt. Mit der  $\mathcal{A}^e$ -Linearität liefert Anwenden des  $\text{hom}_{\mathcal{A}^e}(\cdot, \mathcal{M})$ -Funktors, dass

$$G_k^* \circ F_k^* - \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_k, \mathcal{M})} = d_k^* s_{k-1}^* + s_k^* d_{k+1}^*$$

und die Stetigkeit zeigt:

$$G^k \circ F^k - \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_k^c, \mathcal{M})} = d_k^* s_{k-1}^* + s_k^* d_{k+1}^*.$$

Mit den Definitionen  $d^k = d_{k+1}^*$  und  $s^k = s_{k-1}^*$  bedeutet dies

$$G^k \circ F^k - \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_k^c, \mathcal{M})} = d^{k-1} s^k + s^{k+1} d^k, \quad (2.7)$$

also  $G^k \circ F^k \sim \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_k^c, \mathcal{M})}$  und folglich  $\widetilde{G}^k \circ \widetilde{F}^k = \text{id}_{H^k((\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*))}$ .

Dies bedeutet  $\widetilde{G}^k \circ \widetilde{F}^k = \text{id}_{H^k((\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*))}$ , also die Surjektivität von  $\widetilde{G}^k$  und die Injektivität von  $\widetilde{F}^k$ .

Um besagte Homotopie  $s$  zu konstruieren gehen wir den in [Wei09, Kapitel 5] beschrittenen Weg. Hierfür benötigen wir das Konzept der  $\mathcal{A}^e$ -Linearisierung von  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\phi: X_k \rightarrow X_{k'}$  zwischen Bar-Moduln.

### Definition 2.2.6

Gegeben eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $\phi: X_s \rightarrow X_r$ , so ist die  $\mathcal{A}^e$ -Linearisierung von  $\phi$  definiert durch:

$$\begin{aligned} \overline{\phi}: X_s &\longrightarrow X_r \\ v \otimes \alpha_s \otimes w &\longmapsto v \otimes w *_e \phi(1 \otimes \alpha_s \otimes 1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Diese ist  $\mathbb{K}$ -linear, also mit Korollar B.3.5 durch (2.8) wohldefiniert. Sei  $X'_s = \mathcal{A} \otimes X_s \otimes \mathcal{A}$ , dann definieren wir die  $\mathcal{A}^e$ - sowie  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen:

$$\begin{aligned} \phi': X'_s &\longrightarrow X'_r \\ v \otimes v' \otimes \alpha_s \otimes w' \otimes w &\longmapsto v \otimes \phi(v' \otimes \alpha_s \otimes w') \otimes w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_s: X_s &\longrightarrow X'_s \\ v \otimes \alpha_s \otimes w &\longmapsto v \otimes 1 \otimes \alpha_s \otimes 1 \otimes w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_r: X'_r &\longrightarrow X_r \\ v \otimes v' \otimes \alpha_s \otimes w' \otimes w &\longmapsto v \otimes w *_e v' \otimes \alpha_s \otimes w'. \end{aligned}$$

Hiermit lässt sich  $\bar{\phi}$  auch schreiben als  $\bar{\phi} = i_r \circ \phi' \circ p_s$ . Weiterhin folgt unmittelbar  $i_t \circ p_t = \text{id}_{X_t}$ .

Folgende Proposition liefert uns einige wichtige Eigenschaften.

**Proposition 2.2.7**

Gegeben seien  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen  $\psi: X_s \longrightarrow X_t$  und  $\phi: X_t \longrightarrow X_r$ . Dann gilt:

i.) Es gilt  $\bar{\text{id}}_{X_s} = \text{id}_{X_s}$ , zudem ist die  $\mathcal{A}^e$ -Linearisierung aufgefasst als Abbildung

$$\bar{\phantom{x}}: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X_s, X_t) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_s, X_t)$$

$\mathbb{K}$ -linear.

ii.) Für  $\mathcal{A}^e$ -lineares  $\phi$  ist  $\bar{\phi} = \phi$ , also insbesondere  $\bar{d}_k = d_k$  und  $\bar{\Omega}_k = \Omega_k$ .

iii.) Ist  $i_r \circ \phi' = \phi \circ i_t$ , so gilt  $\bar{\phi} = \phi$  und  $\phi \circ \bar{\psi} = \overline{\phi \circ \psi}$ . Im Speziellen ist dies für alle  $d_k$  der Fall.

iv.) Im lokalkonvexen Fall gilt: Ist  $\phi$  stetig, so auch  $\bar{\phi}$ .

BEWEIS: i.) und ii.) sind unmittelbar klar und iii.) folgt mit

$$\bar{\phi} = i_r \circ \phi' \circ p_t = \phi \circ i_t \circ p_t = \phi \circ \text{id}_{X_t} = \phi.$$

Um die zweite Aussage zu zeigen, rechnen wir

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)'(v \otimes v' \otimes \alpha_s \otimes w' \otimes w) &= v \otimes [(\phi \circ \psi)(v' \otimes \alpha_s \otimes w')] \otimes w \\ &= \phi'(v \otimes \psi(v' \otimes \alpha_s \otimes w')) \otimes w \\ &= (\phi' \circ \psi')(v \otimes v' \otimes \alpha_s \otimes w' \otimes w), \end{aligned}$$

und erhalten

$$\overline{\phi \circ \psi} = i_r \circ \phi' \circ \psi' \circ p_s = \phi \circ i_t \circ \psi' \circ p_s = \phi \circ \bar{\psi}.$$

Die letzte Behauptung folgt mit

$$\begin{aligned} (i_{k-1} \circ d'_k)(v \otimes x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \otimes w) &= i_{k-1}(v \otimes d_k(x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1}) \otimes w) \\ &= v \otimes w *_e \sum_{j=0}^k (-1)^j x_0 \otimes \dots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_{k+1} \\ &= (d_k \circ i_k)(v \otimes x_0 \otimes \dots \otimes x_{k+1} \otimes w). \end{aligned}$$

Für *iv.*) sei  $\phi$  stetig, dann folgt mit der Stetigkeit von  $*_e$ :

$$\begin{aligned} q^{k+2}(\overline{\phi}(v \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k \otimes w)) &= q^{k+2}(v \otimes w *_e \phi(1 \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k \otimes 1)) \\ &\leq c p_1^2(v \otimes w) p_2^{k+2}(1 \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k \otimes 1) \\ &= c p_2(1)^2 p_1(v) p_1(w) p_2(\alpha_1) \dots p_2(\alpha_k). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Stetigkeit in  $\pi_{k+2}$  und beendet den Beweis. ■

Folgendes Lemma liefert uns schließlich die erwünschte Homotopie  $s$ .

**Lemma 2.2.8**

Es ist  $\text{id}_{X_k} - \Omega_k = d_{k+1}s_k + s_{k-1}d_k$ , also  $\Omega \sim \text{id}_X$  vermöge der  $\mathcal{A}^e$ -linearen Homotopie  $s_k: X_k \rightarrow X_{k+1}$ , die für  $k \geq 0$  rekursiv definiert ist durch:

$$s_k = \overline{h_k(\text{id}_{X_k} - \Omega_k - s_{k-1}d_k)} \quad \text{mit} \quad s_0 = 0.$$

Hierbei bezeichnet  $h$  die exaktheitsliefernde Homotopie aus Proposition 2.1.6 ii.). Zudem ist  $s_k: X_k^c \rightarrow X_{k+1}^c$ , aufgefasst als Abbildung zwischen den lokalkonvexen Vektorräumen  $X_k^c$  und  $X_{k+1}^c$  stetig.

BEWEIS: Die Stetigkeit der  $s_k$  folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der definierenden Abbildungen<sup>3</sup> und Proposition 2.2.7 *iv.*). Die  $\mathcal{A}^e$ -Linearität ist ebenfalls klar.

Für den Induktionsanfang rechnen wir mit Proposition 2.2.7:

$$\begin{aligned} d_2s_1 - s_0d_1 &= \overline{d_2h_1(\text{id}_{X_1} - \Omega_1 - s_0d_1)} \stackrel{\text{iii.})}{=} \overline{(d_2h_1)(\text{id}_{X_1} - \Omega_1)} \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \overline{(\text{id}_{X_1} - h_0d_1)(\text{id}_{X_1} - \Omega_1)} \stackrel{\text{i.}, \text{ii.})}{=} \text{id}_{X_1} - \Omega_1 - \overline{h_0d_1} + \overline{h_0d_1\Omega_1} \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \text{id}_{X_1} - \Omega_1, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt zudem  $\Omega_0 = \text{id}_{\mathcal{A}^e}$  benutzt haben. Für die höheren Grade folgt:

$$\begin{aligned} d_{k+1}s_k &= \overline{(d_{k+1}h_k)(\text{id}_{X_k} - \Omega_k - s_{k-1}d_k)} \\ &= \overline{(\text{id}_{X_k} - h_{k-1}d_k)(\text{id}_{X_k} - \Omega_k - s_{k-1}d_k)} \\ &= \text{id}_{X_k} - \Omega_k - \overline{s_{k-1}d_k} - \overline{h_{k-1}(d_k - d_k\Omega_k - (d_k s_{k-1})d_k)} \\ &= \text{id}_{X_k} - \Omega_k - s_{k-1}d_k - \overline{h_{k-1}(d_k - \Omega_{k-1}d_k - (\text{id}_{X_k} - \Omega_{k-1} - s_{k-2}d_{k-1})d_k)} \\ &= \text{id}_{X_k} - \Omega_k - s_{k-1}d_k. \end{aligned}$$

■

Dies zeigt schließlich folgenden Satz:

---

<sup>3</sup>vgl. Proposition 2.2.4

**Satz 2.2.9**

Gegeben ein lokalkonvexer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k\left(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*\right) \cong H^k\left(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}), \partial_c^*\right).$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_k^c, \mathcal{M}).$$

BEWEIS: Die erste Isomorphie hatten wir bereits eingesehen. Die zweite folgt nun unmittelbar mit Bemerkung 2.2.5, da wir mit Lemma 2.2.8 die benötigte stetige Homotopie gefunden haben. Die letzte Aussage folgt wie für Satz 1.3.8, da auch hier  $\ker(\partial_{k+1}^*) = \mathcal{K}_k^*$  und  $\text{im}(\partial_k^*) = 0$  erfüllt ist. ■

## 2.3. Die stetige Hochschild-Kohomologie der Algebra $\text{Hol}(\mathbb{V})$

Sei im Folgenden  $\mathbb{V}$  ein hausdorffscher, lokalkonvexer Vektorraum. Wir beginnen mit der folgenden, klärenden Proposition:

**Proposition 2.3.1**

- i.) Gegeben ein hlkVR  $\mathbb{V}$ , so existiert eine bis auf lineare Homöomorphie eindeutig bestimmte vollständige, hausdorffsche, submultiplikative, lokalkonvexe Algebra  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathfrak{P}_H, *)$ , die  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathfrak{P}, \vee)$  im isometrischen Sinne als dichte Unter algebra enthält. Diese ist zudem assoziativ und unitär.
- ii.) Jeder hausdorffsche, lokalkonvexe  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $(\mathcal{M}, *_L, *_R)$  vervollständigt zu einem hausdorffschen, lokalkonvexen  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{*}_L, \hat{*}_R)$ .

BEWEIS: i.) Zunächst ist nach Satz B.3.7 v.) mit  $\mathbb{V}$  ebenfalls jedes  $(S^k(\mathbb{V}), \pi_k)$  hausdorffsch und es ist offensichtlich, dass dies dann ebenfalls für  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathfrak{P})$  der Fall ist. Es folgt mit Satz B.2.5, dass die bis auf lineare Homöomorphie eindeutig bestimmte Vervollständigung  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathfrak{P}_H) = (\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}, \hat{\mathfrak{P}})$  existiert und ebenfalls hausdorffsch ist. Weiter folgt, dass die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\vee}: i(S^\bullet(\mathbb{V})) \times i(S^\bullet(\mathbb{V})) &\longrightarrow i(S^\bullet(\mathbb{V})) \subseteq \text{Hol}(\mathbb{V}) \\ (x, y) &\longmapsto i(i^{-1}(x) \vee i^{-1}(y)) \end{aligned}$$

als Verkettung stetiger Funktionen stetig ist. Hierbei haben wir benutzt, dass die stetige Isometrie  $i$  aus Satz B.2.5 ein Homöomorphismus zwischen  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathfrak{P})$  und  $(i(S^\bullet(\mathbb{V})), \hat{\mathfrak{P}})$  ist. Mit  $\overline{i(S^\bullet(\mathbb{V}))} = \text{Hol}(\mathbb{V})$  liefert uns Satz B.2.8 eine eindeutig bestimmte stetige, bilineare Fortsetzung

$$*: \text{Hol}(\mathbb{V}) \times \text{Hol}(\mathbb{V}) \longrightarrow \text{Hol}(\mathbb{V}),$$

und wegen

$$\hat{\mathbf{p}}(x * y) = \lim_{\alpha \times \beta} \mathbf{p}(x_\alpha \tilde{\vee} y_\beta) \leq \lim_{\alpha \times \beta} \mathbf{p}(x_\alpha) \mathbf{p}(y_\beta) = \hat{\mathbf{p}}(x) \hat{\mathbf{p}}(y)$$

ist  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), \hat{\mathfrak{P}}, *)$  zudem submultiplikativ. Hierbei ist  $x, y \in \text{Hol}(\mathbb{V})$  mit Netzen  $i(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})) \supseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x, i(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})) \supseteq \{y_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow y$ .

Für die Unitarität betrachten wir das Element  $\text{Hol}(\mathbb{V}) \ni \tilde{1} := i(1_{\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})})$  und erhalten für ein Netz  $i(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})) \supseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x \in \text{Hol}(\mathbb{V})$  sowie  $\hat{1} = \{\tilde{1}\}$  die konstante Folge  $\tilde{1}$ , dass:

$$\hat{1} * x = \lim_{n \times \alpha} \{i(1_{\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})})\} \tilde{\vee} x_\alpha = \lim_{\alpha} x_\alpha = x.$$

Spätestens hier ist nun auch klar, dass wir vermöge  $i$  die Räume  $(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \vee)$  und  $i(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \tilde{\vee})$  identifizieren dürfen. Für die Assoziativität rechnen wir daher in Kurzschreibweise mit  $x, y, z \in \text{Hol}(\mathbb{V})$ :

$$x * (y * z) = \lim_{\alpha \times (\beta \times \gamma)} x_\alpha \vee (y_\beta \vee z_\gamma) = \lim_{(\alpha \times \beta) \times \gamma} (x_\alpha \vee y_\beta) \vee z_\gamma = (x * y) * z,$$

da definitionsgemäß  $\{y_\beta \vee z_\gamma\}_{\beta \times \gamma \in J \times L} \rightarrow y * z$  und  $\{x_\alpha \vee y_\beta\}_{\alpha \times \beta \in I \times J} \rightarrow x * y$ .

ii.) Zunächst ist wieder klar, dass für jeden solchen Bimodul  $\mathcal{M}$  eine Vervollständigung  $\hat{\mathcal{M}}$  existiert. Des Weiteren induzieren  $*_L$  und  $*_R$  stetige, bilineare Abbildungen auf den dichten Teilräumen  $i(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})) \subseteq \text{Hol}(\mathbb{V})$  und  $i'(M) \subseteq \hat{M}$ , womit stetige bilineare Fortsetzungen  $\hat{*}_L$  und  $\hat{*}_R$  existieren. Die  $\text{Hol}(\mathbb{V})$ -Verträglichkeit, also  $\hat{1} \hat{*}_L \hat{m} = \hat{m} = \hat{m} \hat{*}_R \hat{1}$  für alle  $\hat{m} \in \hat{\mathcal{M}}$  folgt dann wie die Unitarität in i.), und die Vererbung der Bimoduleigenschaft wie die Assoziativität in i.). ■

Punkt ii.) ist unter anderem als Motivation dafür gedacht, dass überhaupt derartige  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimoduln existieren. Als wichtiges Resultat aus i.) erhalten wir umgekehrt:

### Korollar 2.3.2

Gegeben ein  $hlkVR$   $\mathbb{V}$  und ein lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , so gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*).$$

Hierbei bezeichnet  $(X_c, d_c)$  den zu  $\mathcal{A} = \text{Hol}(\mathbb{V})$  gehörigen, topologischen Bar-Komplex.

BEWEIS: Dies folgt schon wie im letzten Abschnitt aus Proposition 2.1.6 iii.), da  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), \hat{\mathfrak{P}}_H, *)$  mit Proposition 2.3.1 eine lokalkonvexe, unitäre und assoziative  $\mathbb{K}$ -Algebra ist. ■

Wir wollen den Raum  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  zunächst mit ein wenig Anschauung füllen. Hierfür definieren wir:

**Definition 2.3.3**

Gegeben ein hlkVR  $(\mathbb{V}, P)$  sowie die topologischen Räume  $(\widehat{S^k(\mathbb{V})}, p^k)$ .

Wir bezeichnen mit  $(\Pi_{\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}}, \mathfrak{P}_\times)$  den hlkVR

$$\Pi_{\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}} = \left\{ \prod_{k=0}^{\infty} \widehat{S^k(\mathbb{V})} \ni \hat{\omega} = (\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots) \mid \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k(\hat{\omega}_k) < \infty, \forall p \in \tilde{P} \right\}.$$

Zusammen mit Satz B.2.5 zeigt der Folgende, dass wir  $(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathfrak{P}_H)$  mit dem Potenzreihenraum  $(\Pi_{\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}}, \mathfrak{P}_\times)$  identifizieren dürfen.

**Satz 2.3.4 (Potenzreihen)**

Gegeben ein hlkVR  $(\mathbb{V}, P)$ , dann gilt:

- i.)  $(\Pi_{\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}}, \mathfrak{P}_\times)$  ist vollständig.
- ii.)  $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \widehat{S^k(\mathbb{V})}$ , topologisiert vermöge  $\mathfrak{P}_\times$ , ist folgendicht in  $(\Pi_{\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}}, \mathfrak{P}_\times)$ .
- iii.)  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathfrak{P})$  ist dicht in  $(\Pi_{\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}}, \mathfrak{P}_\times)$  vermöge isometrischer Einbettung:

$$\begin{aligned} i: \sum_k \omega_k &\longmapsto \prod_{k=0}^{\infty} i_k(\omega_k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} p^k &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}^k. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen die  $i_k$  die Isometrien  $i_k: S^k(\mathbb{V}) \hookrightarrow \widehat{S^k(\mathbb{V})}$ .

BEWEIS: i.) Sei  $\{\hat{\omega}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \Pi_{\widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}}$  ein Cauchynetz, dann existiert für jedes  $\epsilon \geq 0$  ein  $\alpha_\epsilon \in I$ , so dass:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}^k(\hat{\omega}_\alpha^k - \hat{\omega}_\beta^k) < \epsilon \quad \forall \alpha, \beta \geq \alpha_\epsilon \in I.$$

Damit ist insbesondere  $\{\hat{\omega}_\alpha^k\}_{\alpha \in I} \subseteq \widehat{S^k(\mathbb{V})}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Cauchynetz, womit  $\{\hat{\omega}_\alpha^k\}_{\alpha \in I} \rightarrow \hat{\omega}^k$  mit eindeutigem  $\hat{\omega}^k \in \widehat{S^k(\mathbb{V})}$  gilt.

Wir definieren  $\hat{\omega} = \prod_{k=0}^{\infty} \hat{\omega}^k$  und behaupten, dass dann  $\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}) < \infty$  für alle  $p \in \tilde{P}$  sowie  $\{\hat{\omega}_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow \hat{\omega}$  erfüllt ist.

Nun gilt

$$\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_\alpha) \leq \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_\alpha - \hat{\omega}_{\alpha_\epsilon}) + \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_{\alpha_\epsilon}) < \epsilon + \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_{\alpha_\epsilon}) = \tilde{c} \quad \forall \alpha \geq \alpha_\epsilon \in I$$



und folglich:

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}_\alpha^k) \leq \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_\alpha) < \tilde{c} \quad \forall \alpha \geq \alpha_\epsilon \in I, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hiermit erhalten wir

$$\tau_n = \sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}^k) = \sum_{k=0}^n \lim_{\alpha} \hat{p}^k(\hat{\omega}_\alpha^k) = \lim_{\alpha} \sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}_\alpha^k) \leq \hat{c} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

womit  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, da alle Summanden positiv sind. Die zeigt die Existenz des Limes  $n \rightarrow \infty$  und es folgt:

$$\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}) = \lim_n \sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}^k) = \lim_n \tau_n \leq \hat{c} < \infty.$$

Für die Konvergenzaussage beachten wir, dass

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}_\alpha^k - \hat{\omega}_\beta^k) \leq \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_\alpha - \hat{\omega}_\beta) < \epsilon \quad \forall \alpha, \beta \geq \alpha_\epsilon,$$

womit  $\mu_n$  eine Cauchyfolge ist und der Limes existiert. Es folgt:

$$\sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}^k - \hat{\omega}_\beta^k) = \lim_{\alpha} \sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}_\alpha^k - \hat{\omega}_\beta^k) \leq \epsilon \quad \forall \beta \geq \alpha_\epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt

$$\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega} - \hat{\omega}_\beta) = \lim_n \sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}^k - \hat{\omega}_\beta^k) \leq \epsilon \quad \forall \beta \geq \alpha_\epsilon,$$

also  $\{\hat{\omega}_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow \hat{\omega} \in \widehat{\Pi_{S^\bullet(\mathbb{V})}}$ .

ii.) Sei  $\widehat{\Pi_{S^\bullet(\mathbb{V})}} \ni \hat{\omega} = (\hat{\omega}^0, \hat{\omega}^1, \hat{\omega}^2, \dots)$  und

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \widehat{S^k(\mathbb{V})} \ni \hat{\omega}_n = (\hat{\omega}^0, \hat{\omega}^1, \dots, \hat{\omega}^n, 0, 0, 0, \dots).$$

Dann ist  $\lim_n \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_n) = \lim_n \sum_{k=0}^n \hat{p}^k(\hat{\omega}_k) = \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}) = c < \infty$ , also  $\{\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine

Cauchyfolge, womit  $\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_m - \hat{\omega}_n) = \sum_{k=n+1}^m \hat{p}^k(\hat{\omega}^k) = |\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_m) - \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_n)| < \epsilon$  für

alle  $m \geq n \geq N_\epsilon$ . Es folgt

$$\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega} - \hat{\omega}_n) = \lim_m \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_m - \hat{\omega}_n) = \lim_m |\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_m) - \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_n)| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon$$

und somit  $\{\hat{\omega}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \hat{\omega}$ .

iii.) Seien  $\hat{\omega}$  und  $\hat{\omega}_n$  wie in ii.). Wir fassen  $P \times \mathbb{N}$  als gerichtete Menge auf<sup>4</sup> und wählen

---

<sup>4</sup>vgl. Definition B.2.3 ii.)

für jedes Element  $(p, n)$  ein  $k_{p,n} \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega} - \hat{\omega}_k) < \frac{1}{2n} \quad \forall k \geq k_{p,n}$$

gilt, was nach *ii.*) ohne Einschränkung möglich ist.

Ferner denken wir uns  $S^\bullet(\mathbb{V}) \subseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \widehat{S^k(\mathbb{V})}$  isometrisch eingebettet und finden für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Netz  $\{\omega_{\alpha_k}^k\}_{\alpha_k \in I_k} \subseteq S^k(\mathbb{V})$  mit  $\{\omega_{\alpha_k}^k\}_{\alpha_k \in I_k} \rightarrow \hat{\omega}^k \in \widehat{S^k(\mathbb{V})}$ .

Für besagtes  $(p, n)$  und  $0 \leq k \leq k_{p,n}$  bedeutet dies die Existenz von Indizes  $\alpha_k \in I_k$  derart, dass

$$\hat{p}^k(\hat{\omega}^k - \omega_{\alpha_k}^k) < \frac{1}{2n(k_{p,n} + 1)}.$$

Wir definieren  $\omega_{p,n} = (\omega_{\alpha_1}^0, \omega_{\alpha_2}^1, \dots, \omega_{\alpha_{k_{p,n}}}^{k_{p,n}}, 0, 0, 0, \dots)$ , womit

$$\mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_{k_{p,n}} - \omega_{p,n}) = \sum_{k=0}^{k_{p,n}} \hat{p}^k(\hat{\omega}^k - \omega_{\alpha_k}^k) < \frac{1}{2n}$$

und folglich für alle  $(p', n') \geq (p, n)$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega} - \omega_{p',n'}) &\leq \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega} - \hat{\omega}_{k_{p',n'}}) + \mathfrak{p}_\times(\hat{\omega}_{k_{p',n'}} - \omega_{p',n'}) \\ &\leq \mathfrak{p}'_\times(\hat{\omega} - \hat{\omega}_{k_{p',n'}}) + \mathfrak{p}'_\times(\hat{\omega}_{k_{p',n'}} - \omega_{p',n'}) \\ &< \frac{1}{2n'} + \frac{1}{2n'} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dies zeigt  $\{\omega_{p,n}\}_{p \in P \times \mathbb{N}} \rightarrow \hat{\omega}$  und mit Bemerkung B.2.2 *iii.*) die Behauptung. ■

### Bemerkung 2.3.5

Obiger Satz besagt also insbesondere, dass die Vervollständigung von  $(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathfrak{P})$  bereits durch die Vervollständigungen der  $(S^k, \pi_k)$  festgelegt ist. Des Weiteren ist es sogar möglich, jedes  $\hat{\omega} \in \widehat{S^\bullet(\mathbb{V})}$  durch eine Folge in  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \widehat{S^k(\mathbb{V})}$  zu approximieren. Die Schwierigkeit liegt hierbei also in der Vervollständigung der  $(S^k, \pi_k)$ , die für unendlich-dimensionales  $\mathbb{V}$  im Allgemeinen alles andere als trivial ist. Für endlich-dimensionales  $\mathbb{V}$  hingegen ist  $(S^k, \pi_k)$  bereits vollständig, vgl. Beispiel 2.3.6 *i.*).

### Beispiel 2.3.6 (Holomorphe Funktionen)

*i.)* Wir versehen den Vektorraum  $\mathbb{C}^{n*}$  mit der üblichen euklidischen Normtopologie. Mit der Äquivalenz aller Normen auf  $\mathbb{C}^{n*}$  können wir uns wahlweise auf das System, bestehend aus allen bezüglich der Maximumsnorm

$$p_{\max}(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{mit} \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$$

stetigen Halbnormen festlegen, und verschaffen uns so ein filtrierendes System  $\tilde{P}$  auf  $\mathbb{C}^{n*}$ . Dieses enthält dann insbesondere wieder alle Normen der Form  $|c| p_{\max}$  für positive Konstanten  $|c|$ . Die symmetrische Algebra sei wie in Abschnitt 2.1 topologisiert vermöge  $\mathfrak{P}$ .

Wir behaupten zunächst, dass

$$p_{\max}^k(z) = \sum_{i_1, \dots, i_k}^n |a_{i_1, \dots, i_k}| \quad (2.9)$$

für alle  $T^\bullet(\mathbb{C}^{n*}) \ni z = \sum_{i_1, \dots, i_k}^n a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$  gilt. Hierbei beachte man, dass dann (2.9) mit unserer Konvention  $e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} e^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e^{\sigma(i_k)}$  ebenso für alle  $S^\bullet(\mathbb{C}^{n*}) \ni z = \sum_{i_1, \dots, i_k}^n a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_k}$  richtig ist. Bezeichne hierfür  $p_{\otimes}^k$  die durch (2.9) charakterisierte Norm, dann gilt

$$p_{\max}^k(z) \leq \sum_{i_1, \dots, i_k}^n |a_{i_1, \dots, i_k}| e^{i_1} \cdot \dots \cdot e^{i_k} = p_{\otimes}^k(z)$$

per Definition von  $p_{\max}^k$ . Mit der Normeigenschaft von  $p_{\otimes}^k$  folgt weiter, dass

$$p_{\otimes}^k(z) \leq \sum_i p_{\otimes}^k(z^i) = \sum_i p_{\max}^k(z^i)$$

für alle Zerlegungen  $z = \sum_i z^i$  in separable  $z^i = x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i$  richtig ist. Dabei folgt die zweite Gleichheit mit  $x_j = \sum_{i_j} (x_j)_{i_j} e^{i_j}$  aus:

$$\begin{aligned} p_{\otimes}^k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n |(x_1)_{i_1} \cdot \dots \cdot (x_k)_{i_k}| = \sum_{i_1, \dots, i_k}^n |(x_1)_{i_1}| \cdot \dots \cdot |(x_k)_{i_k}| \\ &= p_{\max}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{\max}(x_k) = p_{\max}^k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k). \end{aligned}$$

Um die Vervollständigung  $(\text{Hol}(\mathbb{C}^{n*}), \hat{\mathfrak{P}})$  von  $(S^\bullet(\mathbb{C}^{n*}), \mathfrak{P})$  zu charakterisieren beachten wir, dass für festes  $k \in \mathbb{N}$  die Topologie auf  $S^k(\mathbb{C}^{n*})$  bereits durch die Norm  $p_{\max}^k$  erzeugt wird. Dies folgt unmittelbar aus Korollar B.1.5 iii.), da mit Satz B.1.4 vi.)  $p \leq |c| p_{\max}$  für alle  $p \in \tilde{P}$  und somit ebenfalls  $p^k \leq |c|^k p_{\max}^k$  für alle  $p \in \tilde{P}$  gilt. Bemerkung B.2.2 i.) zeigt dann, dass wir lediglich Folgenvollständigkeit nachweisen müssen, wenn wir  $\widehat{S^k(\mathbb{C}^{n*})} = S^k(\mathbb{C}^{n*})$  zeigen wollen. Sei hierfür  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S^k(\mathbb{C}^{n*})$  eine Cauchyfolge, dann ist

$$\sum_{i_1, \dots, i_k}^n |a_{i_1, \dots, i_k}^m - a_{i_1, \dots, i_k}^n| = p_{\max}^k(z_m - z_n) < \epsilon \quad \forall m, n \geq N_\epsilon,$$

und mit der Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$  zeigt dies, dass  $a_{i_1, \dots, i_k}^n \longrightarrow a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{C}$ .

Eine analoge Abschätzung liefert  $z_n \longrightarrow \sum_{i_1, \dots, i_k}^n a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_k} \in S^k(\mathbb{C}^{n*})$ ,

was die Folgenvollständigkeit beweist. Hierbei ist wesentlich eingegangen, dass  $S^k(\mathbb{C}^{n*})$  eine endliche Basis besitzt.

Nach Satz 2.3.4 ist dann

$$\text{Hol}(\mathbb{C}^{n*}) = \left\{ \prod_{k=0}^{\infty} S^k(\mathbb{C}^{n*}) \ni \hat{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \left| \sum_{k=0}^{\infty} p^k(\omega_k) < \infty, \forall p \in \tilde{P} \right. \right\},$$

und für  $p_z = |z| p_{\max}$  bedeutet dies:

$$\begin{aligned} p_z(\omega) &= p_z \left( \prod_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k}^n a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_z^k \left( \sum_{i_1, \dots, i_k}^n a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k}^n |a_{i_1, \dots, i_k}| |z|^k \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Vermöge der bijektiven Zuordnung

$$\begin{aligned} \text{Pol}^k(\mathbb{C}^n) &\longleftrightarrow S^k(\mathbb{C}^{n*}) \\ a_{i_1, \dots, i_k} z^{i_1} \dots z^{i_k} &\longleftrightarrow a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_k}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

ist jedes  $S^k(\mathbb{C}^{n*})$  isomorph zu  $\text{Pol}^k(\mathbb{C}^n)$ , dem Raum der Polynome  $k$ -ten Grades

auf  $\mathbb{C}^n$ . Für  $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  sei  $|z| = \max_{0 \leq i \leq n} |z_i|$ . Dann zeigen (2.10) und (2.11),

dass jedes Element aus  $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n*})$  einer absolut konvergenten Potenzreihe auf  $\mathbb{C}^n$  entspricht. Umgekehrt ist für jede derartige Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k}^n |a_{i_1, \dots, i_k}| |z|^k < \infty \quad \forall |z| \geq 0,$$

und da  $p \leq |z| p_{\max}$  für alle  $p \in \tilde{P}$ , folgt:

$$p \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k}^n a_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_k} \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k}^n |a_{i_1, \dots, i_k}| |z|^k < \infty.$$

Insgesamt zeigt dies, dass wir  $(\text{Hol}(\mathbb{C}^{n*}), \hat{\mathfrak{P}})$  mit den auf  $\mathbb{C}^n$  absolut konvergenten Potenzreihen, also mit dem Raum der ganz holomorphen Funktionen  $\text{Hol}(\mathbb{C}^n)$  identifizieren dürfen und liefert die Begründung für die Wahl der Bezeichnung  $\text{Hol}$ .

Die stetige Fortsetzung der Halbnorm  $\mathfrak{p}_z$  ist dann in Multiindexschreibweise auch darstellbar in der Form:

$$\hat{\mathfrak{p}}_z(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{\alpha!} \left| \frac{\partial^k \phi}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}}(0) \right| \quad \forall \phi \in \text{Hol}(\mathbb{C}^n).$$

ii.) Sei  $\mathbb{V} = \mathbb{K}^{|\mathbb{N}|}$  oder ein anderer unendlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\mathbb{V}^*$  schwach\* topologisiert, vermöge den Halbnormen  $P^* = \{p_v\}_{v \in \mathbb{V}}$  mit

$$p_v(\phi) = |\phi(v)| \quad \forall \phi \in \mathbb{V}^*.$$

Insbesondere ist dann bereits  $|c|p_v = p_{cv}$  in  $P^*$  enthalten und  $p_{\max} = \sum_{i=1}^n p_{e_i}$  zeigt, dass wir es hier in der Tat mit einer Verallgemeinerung von i.) zu tun haben. Bezeichne wieder  $\tilde{P}^*$  das filtrierende und separierende System aller bezüglich dieser Topologie stetigen Halbnormen. Wegen Satz 2.3.4 dürfen wir uns  $\text{Hol}(\mathbb{V}^*)$  als unendliche Potenzreihen mit Summanden in den  $\widehat{S^k(\mathbb{V}^*)}$  vorstellen, und wir wollen im Folgenden zeigen, dass jedes  $h \in \text{Hol}(\mathbb{V}^*)$  sogar eine komplexwertige Potenzreihe im Funktionensinne auf  $\mathbb{V}$  definiert.

Sei hierfür  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq S^\bullet(\mathbb{V}^*)$  mit  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow h$ . Dann ist  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I}$  insbesondere ein Cauchynetz und somit  $\mathfrak{p}_v(h_\alpha - h_\beta) < \epsilon$  für alle  $\alpha, \beta \geq \alpha_\epsilon$ .

Für  $u_1 \otimes \dots \otimes u_k \in T^k(\mathbb{V}^*)$  und  $v \in \mathbb{V}$  ist  $\tau_v: u_1 \otimes \dots \otimes u_k \mapsto u_1(v) \dots u_k(v)$ , vermöge linearer Fortsetzung durch Korollar B.3.5, auf ganz  $T^k(\mathbb{V}^*)$  wohldefiniert. Sei weiter  $(\Delta_k^* u^k)(v) := \tau_v(u^k)$ , so folgt  $(\Delta_k^* u_1 \vee \dots \vee u_k)(v) = u_1(v) \dots u_k(v)$ .

Nun ist  $h_\alpha = \sum_k u_\alpha^k$  mit  $u_\alpha^k \in S^k(\mathbb{V}^*)$  und endlicher Summe, und wir definieren:

$$h(v) = \lim_\alpha \sum_k (\Delta_k^* u_\alpha^k)(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

Um die Wohldefiniertheit dieser Abbildung zu zeigen, sei  $u^k \in S^k(\mathbb{V}^*)$ , dann folgt

$$\begin{aligned} (\Delta_k^* u^k)(v) &= \sum_{i=1}^n u_1^i(v) \dots u_k^i(v) \leq \left| \sum_{i=1}^n u_1^i(v) \dots u_k^i(v) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |u_1^i(v) \dots u_k^i(v)| = \sum_{i=1}^n p_v(u_1^i) \dots p_v(u_k^i) \end{aligned} \quad (2.12)$$

für alle Zerlegungen  $\sum_{i=1}^n u_1^i \otimes \dots \otimes u_k^i$  von  $u^k$  und somit  $(\Delta_k^* u^k)(v) \leq p_v^k(u)$ .

Dies bedeutet

$$\begin{aligned} |h_\alpha(v) - h_\beta(v)| &= \left| \sum_k \left( \Delta_k^* [u_\alpha^k - u_\beta^k] \right) (v) \right| \leq \sum_k p_v^k (u_\alpha^k - u_\beta^k) \\ &= \mathfrak{p}_v(h_\alpha - h_\beta) < \epsilon \end{aligned}$$

für alle  $\alpha, \beta \geq \alpha_\epsilon$ . Damit ist  $\{h_\alpha(v)\}_{\alpha \in I}$  ein Cauchynetz in  $\mathbb{C}$  und  $h(v) = \lim_{\alpha} h_\alpha(v)$  existiert. Für die Unabhängigkeit obiger Definition von der Wahl des Netzes sei  $S^\bullet(\mathbb{V}^*) \supseteq \{h'_\beta\}_{\beta \in J}$  ein weiteres Netz mit  $\{h'_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow h$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(v) - h'_\beta(v)| &\leq |h(v) - h_\alpha(v)| + |h_\alpha(v) - h'_\beta(v)| \\ &= |h(v) - h_\alpha(v)| + \mathfrak{p}_v(h_\alpha - h'_\beta). \end{aligned}$$

Wegen  $\{h_\alpha(v)\}_{\alpha \in I} \rightarrow h(v)$  existiert ein  $\alpha_\epsilon \in I$ , so dass  $|h(v) - h_\alpha(v)| \leq \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $\alpha \geq \alpha_\epsilon$  und wegen  $\{h_\alpha(v)\}_{\alpha \in I} \sim \{h'_\beta\}_{\beta \in J}$  (vgl. Definition B.2.3 i.) ein  $(\alpha', \beta') \in I \times J$ , so dass  $\mathfrak{p}_v(h_\alpha - h'_\beta) \leq \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha', \beta')$ . Insgesamt zeigt dies  $|h(v) - h'_\beta(v)| \leq \epsilon$  für alle  $\alpha \geq \tilde{\alpha}$  mit  $\tilde{\alpha} \geq \alpha_\epsilon, \alpha'$ , also  $\{h'_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow h$ .

Als Beispiel sei  $\hat{u} \in \widehat{\mathbb{V}^*}$ , dann ist  $\overbrace{\hat{u} \vee \dots \vee \hat{u}}^k \in \widehat{S^k(\mathbb{V}^*)}$  wegen  $\widehat{S^k(\mathbb{V}^*)} \cong \widehat{S^k(\widehat{\mathbb{V}^*)}}$

nach Satz B.3.7 vi.), und wir definieren  $\exp(\hat{u}) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{\hat{u} \vee \dots \vee \hat{u}}^k$ .

Dann folgt für  $q = p_v$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_\times(\exp(\hat{u})) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{p}_v^k(\hat{u} \vee \dots \vee \hat{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{p}_v^k(\hat{u} * \dots * \hat{u}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\hat{p}_v(\hat{u}))^k < \infty, \end{aligned}$$

also  $\exp(\hat{u}) \in \text{Hol}(\mathbb{V}^*)$ . Dabei folgt die letzte Ungleichung mit der Submultiplikativität von  $(\text{Hol}, \mathfrak{P}, *)$  nach Proposition 2.3.1 i.).

Allgemein funktioniert diese Konstruktion für alle absolut konvergenten Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  auf  $\mathbb{C}$ .

Ganz allgemein können wir also die Elemente aus  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  immer als so etwas, wie ganz holomorphen Funktionen auf dem Prädualraum  $\mathbb{V}_*^5$  auffassen, sofern er existiert.

---

<sup>5</sup> $(\mathbb{V}_*)^* = \mathbb{V}$

iii.) Das Resultat aus ii.) lässt sich auch allgemeiner formulieren. Seien hierfür  $\mathbb{V}$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $(\mathbb{U}, P)$  ein hausdorffscher, lokalkonvexer  $\mathbb{K}$ -Vektorraum derart, dass eine  $\mathbb{K}$ -bilineare Abbildung  $\tau: \mathbb{V} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{K}$  existiert, deren Bild sich für festes  $v \in \mathbb{V}$  in der Form

$$\tau(v, u) \leq p_v(u) \quad p_v \in P, \forall u \in \mathbb{U}$$

abschätzen lässt. Sei  $S^\bullet(\mathbb{U})$ , in gewohnter Weise, durch das System  $\tilde{P}$  aller bezüglich  $P$  stetigen Halbnormen topologisiert und  $(\Delta_k^* u^k): \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$  durch lineare Fortsetzung von

$$(\Delta_k^* u_1 \otimes \dots \otimes u_k)(v) = \tau(v, u_1) \dots \tau(v, u_k) \quad \forall u_1 \otimes \dots \otimes u_k \in T^k(\mathbb{U})$$

auf ganz  $T^k(\mathbb{U})$  definiert. Dann folgt wie in ii.), dass  $(\Delta_k^* u^k)(v) \leq p_v^k(u^k)$  für alle  $u^k \in S^k(\mathbb{U})$  gilt und wir erhalten durch

$$h(v) = \lim_{\alpha} \sum_k (\Delta_k^* u_{\alpha}^k)(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

mit  $h \in \text{Hol}(\mathbb{U})$  und  $S^\bullet(\mathbb{U}) \supseteq \{h_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \rightarrow h$  wieder eine wohldefinierte  $\mathbb{K}$ -wertige Potenzreihenfunktion auf  $\mathbb{V}$ . Die restlichen Aussagen aus ii.) gelten dann analog. Physikalisch relevant sind beispielsweise die Kombinationen

$\mathbb{V}$	$\mathbb{U}$
$\mathcal{D}(X)$	$(\mathcal{E}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}}), (\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}}), (\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$
$\mathcal{D}'(X)$	$(\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}}), (\mathcal{D}_K(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}_K})$
$\mathcal{E}'(X)$	$(\mathcal{E}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}}), (\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}}), (\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$

mit einer offenen Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Hierbei bezeichnet  $\mathcal{E}(X)$  die glatten Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{E}(X)$  die glatten Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompakten Träger  $K \subseteq X$  und  $\mathcal{D}_K(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$  die glatten Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger  $K' \subseteq K \subseteq X$ , wobei hier  $K$  ein fest gewähltes Kompaktum ist.

$\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  ist die durch das filtrierende, abzählbare System  $P_{\mathcal{E}}$ , bestehend aus den Halbnormen

$$p_{K,l}(\phi) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq l \\ x \in K}} |\partial^{\alpha} \phi(x)| \quad \forall \phi \in \mathcal{E}(X)$$

mit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $K \subseteq X$  kompakt sowie  $\partial^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$ , erzeugte lokalkonvexe Topologie.

$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$  ist die lokalkonvexe  $\mathcal{D}(X)$ -Raum Topologie (vgl. [Rud91, Def 6.3]), deren erzeugendes Halbnormensystem eher formaler Natur ist<sup>6</sup>.  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_K}$  ist die durch das Halbnormensystem  $P_{K,l} = \{p_{K,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$  erzeugte, lokalkonvexe Topologie, wobei hier  $K$  wieder fest vorgegeben ist.

<sup>6</sup>vgl. Minkowski-Funktional: Bemerkung B.1.6

$\mathcal{D}'(X)$  ist der zu  $(\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$  topologische Dualraum, weshalb nach Satz B.1.7

$$\tau(v, u) := v(u) \leq |v(u)| \leq \overbrace{|c| \tilde{p}(u)}^{\tilde{p}'} \quad v \in \mathcal{D}'(X), \forall u \in \mathcal{D}(X)$$

für eine bezüglich  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$  stetigen Halbnorm  $\tilde{p} \in \tilde{P}_{\mathcal{D}}$  und ein  $|c| > 0$  gilt. Man beachte, dass dann  $\tilde{p}'$  ebenfalls wieder stetig ist. Nun lässt sich zeigen (vgl. [Rud91, Thm 6.6]), dass eine lineare Abbildung  $\phi: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathbb{M}$  in einen weiteren lokalkonvexen Vektorraum  $(\mathbb{M}, Q)$  genau dann stetig bezüglich  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$  ist, wenn für jedes Kompaktum  $K \subseteq X$  die Einschränkung  $\phi|_{\mathcal{D}_K}$  stetig bezüglich  $\mathcal{T}_{\mathcal{D}_K}$  ist. Dies zeigt

$$\tau(v, u) := v(u) \leq |v(u)| \leq p_{K,l}(u) \quad \forall u \in \mathcal{D}_K(X)$$

und somit die zweite Zeile obiger Tabelle.

$\mathcal{E}'(X)$  ist der topologische Dualraum von  $\mathcal{E}(X)$ , womit wir Definitionsgemäß die Abschätzbarkeit

$$\tau(v, u) := v(u) \leq |v(u)| \leq |c| p_{K,l}(u) \quad \forall u \in \mathcal{E}(X)$$

mit  $v \in \mathcal{E}'(X)$  und  $|c| p_{K,l} \in \tilde{P}_{\mathcal{E}}$  erhalten. Der Rest der dritten Zeile folgt dann unmittelbar aus dem bereits gezeigten sowie  $\mathcal{E}'(X) \subseteq \mathcal{D}'(X)$ <sup>7</sup> und  $\mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{E}(X)$ . Dabei beachte man, dass  $(\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$  im Gegensatz zu  $(\mathcal{E}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$  und  $(\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$  weder vollständig noch Folgen vollständig ist.

Für die erste Zeile erhalten wir mit  $\mathcal{D}(X) \ni v \neq 0$  und  $\text{supp}(v) = K \subseteq X$ , dass

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha}(v, u) &:= \int_X v(x) \partial^{\alpha} u(x) dx \\ &= \int_K v(x) \partial^{\alpha} u(x) \leq \overbrace{\sup_{x \in K} |v(x)| \text{Vol}(K)}^{|c| > 0} p_{K,|\alpha|}(u) \end{aligned} \quad (2.13)$$

für alle  $u \in \mathcal{E}(X)$  und somit auch für alle  $u \in \mathcal{D}(X)$  gilt. Wegen  $|c| p_{K,l} \in \tilde{P}_{\mathcal{E}}$  begründet dies die ersten beiden Kombinationen. Für die letzte überlegt man sich, dass die Halbnormen  $p_l(u) = \sup_{x \in X} |\partial^{\alpha} u(x)|$  mit  $l \in \mathbb{N}$  und somit auch  $c p_l$  in  $\tilde{P}_{\mathcal{D}}$  enthalten ist. Nun gilt  $\mathcal{D}'_K(X) \subseteq \mathcal{D}'_K(X)$ ,  $\mathcal{D}'(X) \subseteq \mathcal{D}^*(X)$ ,  $\mathcal{E}'(X) \subseteq \mathcal{E}^*(X)$  und mit (2.13) erhalten wir die Stetigkeitsabschätzung:

$$\phi: \psi \mapsto \tau(\phi, \psi) \leq |c| p_{K,l}(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{E}(X).$$

Hiermit ist jedes  $\phi \in \mathcal{D}(X)$  auch als Element in  $\mathcal{E}'(X)$  auffassbar. Umgekehrt überlegt man sich, dass auch jedes  $\psi \in \mathcal{E}(X)$  als Element in  $\mathcal{D}'_K(X)$  und mit dem Stetigkeitskriterium der  $\mathcal{D}(X)$ -Raum Topologie dann ebenfalls als Element in  $\mathcal{D}'(X)$  aufgefasst werden kann. Zusammen mit ii.) liefert dies Kombinationen der Form:

<sup>7</sup>Dies sind gerade die Elemente aus  $\mathcal{D}'(X)$  mit kompakten Träger, wie bsp.  $\delta_z: \phi \mapsto \phi(z)$ .



$\mathbb{V}$	$\mathbb{U}$
$\mathcal{D}_K(X)$	$(\mathcal{D}'_K(X), \mathcal{T}^*), (\mathcal{E}(X), \mathcal{T}^*)$
$\mathcal{D}(X)$	$(\mathcal{D}'(X), \mathcal{T}^*), (\mathcal{E}(X), \mathcal{T}^*)$
$\mathcal{D}(X), \mathcal{E}(X)$	$(\mathcal{E}'(X), \mathcal{T}^*), (\mathcal{D}(X), \mathcal{T}^*)$

Hierbei bezeichnen  $\mathcal{T}^*$  die jeweiligen schwach\*-Topologien. In der letzten Zeile haben wir  $\mathcal{E}'(X) \subseteq \mathcal{D}'(X)$  benutzt und insgesamt sind hier natürlich noch sehr viel mehr Kombinationsmöglichkeiten erlaubt.

Ein einfaches Beispiel für  $\mathbb{V} = \mathcal{D}(X)$  und  $\mathbb{U} = (\mathcal{E}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$  ist dann nach *ii.*)

$$\begin{aligned} \exp(\phi)(\psi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta_k^* \overbrace{\phi \vee \dots \vee \phi}^{k\text{-mal}})(\psi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overbrace{u(\psi, \phi) \dots u(\psi, \phi)}^{k\text{-mal}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int_X \phi(x) \psi(x) dx \right)^k \end{aligned}$$

mit  $\phi \in \mathcal{E}(X)$  und  $\psi \in \mathcal{D}(X)$  oder für  $\mathbb{V} = \mathcal{D}(X), \mathcal{E}(X)$  und  $\mathbb{U} = (\mathcal{E}'(X), \mathcal{T}^*)$ :

$$\exp(\delta_z)(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\delta_z(\psi))^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \psi(z)^k$$

mit  $\psi \in \mathcal{E}(X), \mathcal{D}(X)$  und  $\delta_z \in \mathcal{E}'(X) \subseteq \mathcal{D}'(X)$ . Im Allgemeinen sind natürlich auch sehr viel komplexere Summanden erlaubt. Wie diese im konkreten aussehen dürfen, hängt dann natürlich auch stark davon ab, ob  $\mathbb{U}$  vollständig ist oder nicht. In den vollständigen Fällen  $(\mathcal{E}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ ,  $(\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ ,  $(\mathcal{D}_K(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}_K})$  beispielsweise, braucht man  $S^k(\mathcal{E}(X))$ ,  $S^k(\mathcal{D}(X))$  und  $S^k(\mathcal{D}_K(X))$  nach Satz B.3.7 *vii.*) nur in den  $\pi_k$ -Topologien vervollständigen und man kann sich überlegen, dass diese als Teilraum von  $\mathcal{E}(X^k)$ ,  $\mathcal{D}(X^k)$  bzw.  $\mathcal{D}_K(X^k)$  auffassbar sind. Als Realisierung des Tensorproduktes nimmt man dann beispielsweise den Teilraum

$$\mathcal{E}_{\text{sep}}(X^k) = \left\{ \phi \in \mathcal{E}(X^k) \mid \phi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^n \phi_1(x_1) \dots \phi_k(x_k) \quad \forall (x_1, \dots, x_k) \in X^k \right\}$$

und rechnet für separable  $\phi_1 \dots \phi_k \in \mathcal{E}(X)$  nach, dass

$$p_{K_1 \times \dots \times K_k, l}(\phi_1 \dots \phi_k) \leq p_{K_1, l}(\phi_1) \dots p_{K_k, l}(\phi_k)$$

und somit ebenfalls  $p_{K_1 \times \dots \times K_k, l}(\phi_{\text{sep}}) \leq p^k(\phi_{\text{sep}})$  für alle  $\phi_{\text{sep}} \in \mathcal{E}_{\text{sep}}(X)$  gilt. Dies bedeutet, dass die  $\pi_k$ -Topologie auf  $\mathcal{E}_{\text{sep}}(X^k)$  feiner ist, als die durch  $(\mathcal{E}(X^k), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$  auf  $\mathcal{E}_{\text{sep}}(X^k)$  induzierte Teilraumtopologie. Da  $(\mathcal{E}(X^k), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$  vollständig ist, bedeutet dies, dass die Vervollständigung von  $\mathcal{E}_{\text{sep}}(X^k)$  bezüglich  $\pi_k$  in  $\mathcal{E}(X^k)$  enthalten sein muss. In der Tat lässt sich sogar zeigen, dass diese wegen der Nuklearität von  $\mathcal{E}(X)$  übereinstimmen, siehe [Tre67, Thm 51.6]. Die Vervollständigung von  $S^k(\mathcal{E}(X))$  besteht dann gerade aus allen total symmetrischen  $\phi \in \mathcal{E}(X^k)$ .

Hiermit lässt sich zeigen, dass dann ebenfalls alle Potenzreihen der Form

$$p(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{X_1 \times \dots \times X_k} \phi_k(x_1, \dots, x_k) \psi(x_1) \dots \psi(x_k) dx_1 \dots dx_k$$

mit total symmetrischen Elementen  $\phi_k \in \mathcal{E}(X^k)$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}^k(\phi_k) < \infty$  durch Elemente aus  $\text{Hol}(\mathbb{V})(\mathcal{E}(X))$  induziert werden können. Die gleiche Aussage erhalten wir ebenfalls für  $(\mathcal{D}_K(X), \mathcal{T}_{\mathcal{D}_K})$ . Im Falle  $(\mathcal{D}(X), \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$  ist allerdings auch die Vervollständigung  $\hat{\mathcal{D}}(X)$  von  $\mathcal{D}(X)$  bezüglich  $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$  zu berücksichtigen und dies gilt natürlich auch für die obigen schwach\*-topologisierten Varianten.

Folgender Satz klärt die Gestalt der Hochschild-Kohomologien von  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  für vollständige, hausdorffsche, lokalkonvexe  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimoduln  $\mathcal{M}$ . Dabei stellt die Vollständigkeit für uns in der Tat eine unverzichtbare Grundvoraussetzung dar. Man beachte, dass dann der wichtige symmetrische Spezialfall  $\mathcal{M} = \text{Hol}(\mathbb{V})$  in diesem Rahmen komplett behandelbar sein wird.

### Satz 2.3.7

Sei  $\mathcal{M}$  ein vollständiger, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul und

$$\begin{aligned} \tau^k : HC_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) &\longrightarrow HC_{\text{cont}}^k(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \\ \hat{\phi} &\longmapsto \hat{\phi}|_{HC_{\text{cont}}^k(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})} \end{aligned}$$

die durch (1.1) für  $\mathcal{A} = \text{Hol}(\mathbb{V})$  bzw.  $\mathcal{A} = \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$  definierten Kettendifferentiale. Dann induzieren die Abbildungen

$$\begin{aligned} \tau^k : HC_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) &\longrightarrow HC_{\text{cont}}^k(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \\ \hat{\phi} &\longmapsto \hat{\phi}|_{HC_{\text{cont}}^k(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})} \end{aligned}$$

einen Kettenisomorphismus  $\tau : (HC_{\text{cont}}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \hat{\delta}_c^k) \longrightarrow (HC_{\text{cont}}(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_c^k)$  und es gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong HH_{\text{cont}}^k(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}).$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}'^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_k^c, \mathcal{M})$$

mit  $(\mathcal{K}_c, \partial_c)$  der Koszul-Komplex über  $\mathcal{A}' = \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$ .

**BEWEIS:** Da jeder  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul insbesondere ein  $\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}) - \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul ist und sich alle angeführten Eigenschaften auf die Unter algebra übertragen, folgt die zweite Isomorphie mit Satz 2.2.9 aus der ersten, und für diese reicht es nach Lemma A.2.5 ii.), die Kettenisomorphismus-Eigenschaft von  $\tau$  nachzuweisen.

Zunächst folgt mit Satz B.2.8 und Bemerkung B.2.7 ii.), dass die  $\tau^k$  Isomorphismen mit stetiger Fortsetzung  $\tau_{-1}^k$  als Umkehrabbildung sind. Dabei folgt  $\widehat{\phi + \psi} = \widehat{\phi} + \widehat{\psi}$ , also die Linearität von  $\tau_{-1}^k$ , sofort mit der Stetigkeit der Addition.

Die Kettenabbildungs-Eigenschaft erhalten wir unmittelbar aus der Definition der  $\text{Hol}(\mathbb{V})$ -Algebrenmultiplikation  $*$ , da hiermit

$$\hat{\delta}_c^k(\hat{\phi}) \Big|_{S^\bullet(\mathbb{V})^{k+1}} = \delta_c^k(\hat{\phi} \Big|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k}), \quad (2.14)$$

also  $\tau^{k+1} \circ \hat{\delta}_c^k = \delta_c^k \circ \tau^k$  gilt. Dies zeigt die Behauptung.  $\blacksquare$

Wir wollen die Isomorphismen in Satz 2.3.7 noch ein wenig näher betrachten.

**Definition 2.3.8 (Koszul-Komplex und Vervollständigter Koszul-Komplex)**

i.) Bezeichne  $(\mathcal{K}'_c, \partial'_c)$  den topologischen Koszul-Komplex der Algebra  $\mathcal{A}' = S^\bullet(\mathbb{V})$  und  $*_S$  die zugehörige  $S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi S^\bullet(\mathbb{V})$ -Modul-Multiplikation.

Mit Hilfe von Satz B.3.7 vi.) definieren wir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_k^c &= \widehat{\mathcal{K}'_k^c} = \left( S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi \Lambda^k(\mathbb{V}) \right) = \left( \widehat{S^\bullet(\mathbb{V})} \otimes_\pi \widehat{S^\bullet(\mathbb{V})} \otimes_\pi \widehat{\Lambda^k(\mathbb{V})} \right) \\ &= \left( \widehat{\text{Hol}(\mathbb{V}) \otimes_\pi \text{Hol}(\mathbb{V}) \otimes_\pi \Lambda^k(\mathbb{V})} \right) = \left( \widehat{\text{Hol}(\mathbb{V}) \otimes_\pi \text{Hol}(\mathbb{V})} \otimes_\pi \Lambda^k(\mathbb{V}) \right) \end{aligned}$$

sowie

$$\hat{\mathcal{K}}_0^c = \left( \widehat{S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi S^\bullet(\mathbb{V})} \right) = \left( \widehat{\text{Hol}(\mathbb{V}) \otimes_\pi \text{Hol}(\mathbb{V})} \right) = \hat{\mathcal{A}}^e.$$

Wie in Proposition 2.3.1 ii.) werden diese, vermöge stetiger Fortsetzung  $\hat{*}_S$  von  $*_S$ , zu hausdorffschen, lokalkonvexen  $\hat{\mathcal{A}}^e$ -Linksmoduln. Zudem erhalten wir stetige Fortsetzungen  $\hat{\partial}_k^c$  der Kettendifferentiale  $\partial_k^c$ , die wegen

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_k^c(\hat{a}^e \hat{*}_S \hat{\kappa}^k) &= \hat{\partial}_k^c \left( \lim_{\alpha \times \beta} [a_\alpha^e *_S \kappa_\beta^k] \right) = \lim_{\alpha \times \beta} \partial_k^c(a_\alpha^e *_S \kappa_\beta^k) \\ &= \lim_{\alpha \times \beta} [a_\alpha^e *_S \partial_k^c(\kappa_\beta^k)] = \hat{a}^e \hat{*}_S \hat{\partial}_k^c(\hat{\kappa}^k) \end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{A}}^e$ -linear sind. Den so gewonnenen topologischen Kettenkomplex  $(\hat{\mathcal{K}}_c, \hat{\partial}_c)$  bezeichnen wir als vervollständigten Koszul-Komplex über  $\mathcal{A} = \text{Hol}(\mathbb{V})$ .

ii.) Mit  $\mathcal{K}_k^c$  benennen wir die hausdorffschen, lokalkonvexen  $\mathcal{A}^e$ -Linksmoduln

$$\mathcal{K}_0^c = \text{Hol}(\mathbb{V}) \otimes_\pi \text{Hol}(\mathbb{V}) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{K}_k^c = \text{Hol}(\mathbb{V}) \otimes_\pi \text{Hol}(\mathbb{V}) \otimes_\pi \Lambda^k(\mathbb{V})$$

mit der offensichtlichen  $\mathcal{A}^e$ -Multiplikation  $*_{Hol}$  in den ersten beiden Faktoren. Diese induziert dann ebenfalls eine stetige  $\hat{\mathcal{A}}^e$ -Multiplikation  $\hat{*}_{Hol}$  auf  $\hat{\mathcal{K}}_k^c$ , und da

$$*_{Hol}|_{S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi S^\bullet(\mathbb{V}) \times \Lambda^k(\mathbb{V})} = *_{\mathcal{S}} = \hat{*}_{\mathcal{S}}|_{S^\bullet(\mathbb{V}) \otimes_\pi S^\bullet(\mathbb{V}) \times \Lambda^k(\mathbb{V})},$$

stimmen beide auf einer dichten Teilmenge von  $\hat{\mathcal{K}}_c^k$  überein. Mit der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung von  $*_{\mathcal{S}}$  ist

$$\hat{*}_{\mathcal{S}} = \hat{*}_{Hol} \quad \text{und somit} \quad \hat{*}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{K}_k^c} = *_{Hol}. \quad (2.15)$$

$(\mathcal{K}_k^c, \partial_c)$  bezeichne dann den Kettenkomplex mit Kettendifferentialen  $\partial_k^c = \hat{\partial}_k^c|_{\mathcal{K}_k^c}$ , für dessen Wohldefiniertheit wir zeigen müssen, dass die  $\partial_k^c$  ausschließlich nach  $\mathcal{K}_{k-1}^c \subseteq \hat{\mathcal{K}}_{k-1}^c$  abbilden, und nicht in  $\hat{\mathcal{K}}_{k-1}^c \setminus \mathcal{K}_{k-1}^c$  landen. Hierbei bedeutet  $\setminus$  die mengentheoretische Differenz.

Sei hierfür  $S^\bullet(\mathbb{V}) \supseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x \in \text{Hol}(\mathbb{V})$  und  $S^\bullet(\mathbb{V}) \supseteq \{y_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow y \in \text{Hol}(\mathbb{V})$ . Dann folgt  $\{x_\alpha \otimes_\pi y_\beta \otimes_\pi u\}_{\alpha \times \beta \in I \times J} \rightarrow x \otimes_\pi y \otimes_\pi u \in \mathcal{K}_k^c$ , vermöge zweimaliger Anwendung der Dreiecksungleichung und der Definition der  $\pi_3$ -Halbnormen (siehe auch Beweis zu Satz B.3.7 vi.)). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \partial_k^c(x \otimes_\pi y \otimes_\pi u) &= \lim_{\alpha \times \beta} \partial_k^c(x_\alpha \otimes_\pi y_\beta \otimes_\pi u) \\ &= \lim_{\alpha \times \beta} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (u_j \vee x_\alpha \otimes_\pi y_\beta \otimes_\pi u^j) - \lim_{\alpha \times \beta} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (x_\alpha \otimes_\pi u_j \vee y_\beta \otimes_\pi u^j) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (u_j * x \otimes_\pi y \otimes_\pi u^j) - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (x \otimes_\pi u_j * y \otimes_\pi u^j) \in \mathcal{K}_{k-1}^c \end{aligned}$$

mit gleicher Argumentation wie oben, da definitionsgemäß  $\{u_j \vee x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow u_j * x$  und  $\{u_j \vee y_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow u_j * y$ .

### Lemma 2.3.9

Gegeben ein vollständiger, hausdorffscher, lokalkonvexer,  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , so ist

$$\left( \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}), \partial_c^* \right) \cong \left( \text{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}^e}^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{K}}_c, \mathcal{M}), \hat{\partial}_c^* \right) \cong \left( \text{Hom}_{\mathcal{A}'^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}'_c, \mathcal{M}), \partial_c'^* \right),$$

wobei  $\cong$  Kettenisomorphie vermöge Einschränkung und stetiger Fortsetzung bedeutet. Des Weiteren gilt:

$$H^k \left( \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}), \partial_c^* \right) \cong H^k \left( \text{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}^e}^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{K}}_c, \mathcal{M}), \hat{\partial}_c^* \right) \cong H^k \left( \text{Hom}_{\mathcal{A}'^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}'_c, \mathcal{M}), \partial_c'^* \right).$$

BEWEIS: Für jedes  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_k^c, \mathcal{M})$  existiert eine eindeutige lineare Fortsetzung  $\hat{\phi} \in \text{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}^e}^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{K}}_k^c, \mathcal{M})$  mit  $\hat{\phi}|_{\mathcal{K}_k^c} = \phi$ . Umgekehrt erhalten wir nach (2.15) aus jedem

$\hat{\phi} \in \text{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}^e}^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{K}}_k^c, \mathcal{M})$ , vermöge Einschränkung, ein  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_k^c, \mathcal{M})$ , dessen stetige lineare Fortsetzung  $\hat{\phi}$  ist. Dies zeigt  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}^e}^{\text{cont}}(\hat{\mathcal{K}}_c, \mathcal{M})$ , und wegen

$$\hat{\partial}_{k+1}^{c*}(\hat{\phi})|_{\mathcal{K}_{k+1}^c} = (\hat{\phi} \circ \hat{\partial}_{k+1}^c)|_{\mathcal{K}_{k+1}^c} = \hat{\phi}|_{\mathcal{K}_k^c} \circ \hat{\partial}_{k+1}^c|_{\mathcal{K}_{k+1}^c} = \hat{\phi}|_{\mathcal{K}_k^c} \circ \partial_{k+1}^c = \partial_{k+1}^{c*}(\hat{\phi}|_{\mathcal{K}_k^c}),$$

haben wir es hierbei wieder mit einem Kettenisomorphismus zu tun. Dies zeigt die jeweils erste Isomorphie, und die zweite folgt ganz analog. ■

### Korollar 2.3.10

Mit den Voraussetzungen aus Satz 2.3.7 gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}'^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}'_c, \mathcal{M}), \partial_c'^*) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}), \partial_c^*).$$

Ist  $\mathcal{M}$  symmetrisch, so ist:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}'^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}'_k, \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}).$$

Lemma 2.3.9 und Korollar 2.3.10 kann man auch so auffassen, dass es für vollständige, hausdorffsche  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimoduln es egal ist, ob wir  $\text{hom}_{\mathcal{A}'^e}^{\text{cont}}(\cdot, \mathcal{M})$  auf  $(\mathcal{K}'_c, \partial_c'^*)$ ,  $\text{hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\cdot, \mathcal{M})$  auf  $(\mathcal{K}_c, \partial_c^*)$  oder  $\text{hom}_{\hat{\mathcal{A}}^e}^{\text{cont}}(\cdot, \mathcal{M})$  auf  $(\hat{\mathcal{K}}_c, \hat{\partial}_c^*)$  anwenden. Wir erhalten in jedem Fall den „gleichen“ Kokettenkomplex mit den „gleichen“ Kohomologien-Gruppen.

### Bemerkung 2.3.11 (Nicht vollständige Bimoduln)

Abschließend wollen wir noch erklären, warum die Berechnung der Hochschild-Kohomologien für nicht vollständige Bimoduln  $\mathcal{M}$  mit Hilfe der uns in diesem Rahmen zur Verfügung stehenden Mittel fehlschlägt.

Zunächst ist der zu  $\mathcal{A} = \text{Hol}(\mathbb{V})$  gehörige Bar-Komplex sowohl projektiv, als auch exakt. Für  $(\mathcal{K}_c, \partial_c)$  ist jedoch nur die Projektivität unmittelbar einsichtig, da die Einschränkungen  $\hat{h}_k^c|_{\mathcal{K}_k^c}$  der stetigen Fortsetzungen der exaktheitsliefernden Homotopieabbildungen  $h_k^c$  des topologischen Koszul-Komplexes  $(\mathcal{K}_c, \partial_c)$ , im Gegensatz zu den Einschränkungen der Kettdifferentiale  $\hat{\partial}_k^c|_{\mathcal{K}_k^c}$  im Allgemeinen nicht ausschließlich in die Unterräume  $\mathcal{K}_k^c \subseteq \hat{\mathcal{K}}_k^c$  abbilden, sondern in der Tat in den Vervollständigungen  $\hat{\mathcal{K}}_k^c$  landen. Algebraisch gesehen haben wir damit nichts in der Hand, um besagte Isomorphie zu begründen. Nun könnte man versuchen mit Hilfe der Einschränkungen der stetigen Fortsetzungen  $\hat{F}$  und  $\hat{G}$  zu argumentieren. Jedoch bildet auch  $\hat{G}$  im Allgemeinen nicht in die Unterräume, sondern in die jeweilige Vervollständigung ab. Mit Hilfe von Lemma 2.2.8, der stetigen Fortsetzung der Homotopie  $s$  aus Lemma 1.3.12 i.) sowie  $(\widehat{G_k \circ F_k}) = \hat{G}_k \circ \hat{F}_k$  und  $(\widehat{d_{k+1}s_k + s_{k-1}d_k}) = \hat{d}_{k+1}\hat{s}_k + \hat{s}_{k-1}\hat{d}_k$  folgt dann zwar unmittelbar:

$$H^k(\text{Hom}_{\hat{\mathcal{A}}^e}(\hat{X}_c, \mathcal{M}), \hat{d}_c^*) \cong H^k(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_c, \mathcal{M}), \partial_c^*).$$

Um jedoch die Isomorphie zu der gewünschten Hochschild-Kohomologie herzustellen, also beispielsweise

$$H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_c, \mathcal{M}), d_c^*\right) \cong H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\hat{X}_c, \mathcal{M}), \hat{d}_c^*\right)$$

nachzuweisen, benötigt man wieder Fortsetzungsargumente und hierzu die Vollständigkeit von  $\mathcal{M}$ . Dies liegt im wesentlichen daran, dass der Raum  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_c, \mathcal{M})$  für nicht vollständige Bimoduln  $\mathcal{M}$  im Allgemeinen gehaltvoller als  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\hat{X}_c, \mathcal{M})$  ist. Dies sieht man sofort daran, dass jedes  $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\hat{X}_c, \mathcal{M})$ , vermöge Einschränkung, ein Element in  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_c, \mathcal{M})$  definiert, dessen stetige Fortsetzung es ist. Hierbei haben wir uns  $\mathcal{M} \subseteq \hat{\mathcal{M}}$  kanonisch eingebettet gedacht. Umgekehrt können aber durchaus  $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_c, \mathcal{M})$  existieren, deren stetige Fortsetzung nicht ausschließlich nach  $\mathcal{M}$  abbildet, sondern auch Bilder in  $\hat{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$  besitzt.

### 3. Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme

In diesem Kapitel soll es darum gehen, Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme (vgl. [Wal07, Kapitel 6]) im Falle symmetrischer Bimoduln  $\mathcal{M}$ , für die Kohomologie-Gruppen  $HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ ,  $HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und  $HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  zu beweisen. Die Basis hierfür bilden die Sätze 1.3.8, 2.2.9 und 2.3.7, die wir zunächst etwas umformulieren wollen.

#### 3.1. Vorbereitung

Wir benötigen die folgenden Kokettenkomplexe und Kettenabbildungen:

**Definition 3.1.1**

i.) Sei  $\mathcal{M}$  ein  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul und

$$KC_\Lambda^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \{0\} & k < 0 \\ \mathcal{M} & k = 0 \\ \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^k(\mathbb{V}), \mathcal{M}) & k \geq 1. \end{cases}$$

Vermöge der Links- und Rechtsmodulstruktur auf  $\mathcal{M}$  definieren wir  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen  $\Delta_\Lambda^k: KC_\Lambda^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) \longrightarrow KC_\Lambda^{k+1}(\mathbb{V}, \mathcal{M})$  durch:

$$(\Delta_\Lambda^k \phi)(u_1 \wedge \dots \wedge u_{k+1}) = \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_R] \phi(u_1 \wedge \dots \blacktriangle^l \dots \wedge u_{k+1}).$$

Des Weiteren definieren wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \Upsilon^k: \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}) &\longrightarrow KC_\Lambda^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) \\ \tilde{\phi} &\longmapsto \left[ \phi: \omega \mapsto \tilde{\phi}(1_e \otimes \omega) \right] \end{aligned}$$

mit Umkehrabbildungen

$$\begin{aligned} \Upsilon_{-1}^k: KC_\Lambda^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}) \\ \phi &\longmapsto \left[ \tilde{\phi}: a^e \otimes \omega \mapsto a^e *_e \phi(\omega) \right]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\left( \Upsilon^{k+1} \partial_k^* \right) (\tilde{\phi})(u_1 \wedge \dots \wedge u_{k+1}) = \left( \partial_k^* \tilde{\phi} \right) (1_e \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_{k+1})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} \tilde{\phi} \left( [u_l \otimes 1 - 1 \otimes u_l] \otimes u_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{\blacktriangle}^l \dots \wedge u_{k+1} \right) \\
 &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l \otimes 1 - 1 \otimes u_l] *_e \tilde{\phi} \left( 1_e \otimes u_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{\blacktriangle}^l \dots \wedge u_{k+1} \right) \\
 &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_R] \left( \Upsilon^k \tilde{\phi} \right) \left( u_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{\blacktriangle}^l \dots \wedge u_{k+1} \right) \\
 &= \left( \Delta_{\Lambda}^k \Upsilon^k \right) (\tilde{\phi})(u_1 \wedge \dots \wedge u_{k+1}),
 \end{aligned}$$

also insbesondere

$$\Delta_{\Lambda}^{k+1} \Delta_{\Lambda}^k = \Upsilon^{k+2} \partial_{k+1}^* \partial_k^* \Upsilon_{-1}^k = 0.$$

Hiermit induzieren die  $\Upsilon^k$  einen Kettenisomorphismus zwischen den Kokettenkomplexen  $(\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}, \mathcal{M}), \partial^*)$  und  $(KC_{\Lambda}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta_{\Lambda})$ .

ii.) Wir definieren

$$KC^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \{0\} & k < 0 \\ \mathcal{M} & k = 0 \\ \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}) & k \geq 1, \end{cases}$$

die total antisymmetrischen,  $\mathbb{K}$ -multilinearen Abbildungen von  $\mathbb{V}^k$  nach  $\mathcal{M}$ , sowie die  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen  $\Delta^k : KC^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) \longrightarrow KC^{k+1}(\mathbb{V}, \mathcal{M})$  durch

$$(\Delta^k \phi)(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_R] \phi(v_1, \dots, \mathbf{\blacktriangle}^l, \dots, v_{k+1}).$$

Weiter definieren wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 \Theta^k : KC_{\Lambda}^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) &\longrightarrow KC^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) \\
 \phi' &\longmapsto [\phi : (v_1, \dots, v_k) \mapsto \phi'(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)]
 \end{aligned}$$

mit Umkehrabbildungen

$$\begin{aligned}
 \Theta_{-1}^k : KC^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) &\longrightarrow KC_{\Lambda}^k(\mathbb{V}, \mathcal{M}) \\
 \phi &\longmapsto [\phi' : v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto \phi(v_1, \dots, v_k)].
 \end{aligned}$$

Dabei entsprechen die letzteren gerade den Einschränkungen der durch die universelle Eigenschaft induzierten linearen Abbildungen  $\phi_{\otimes}$  auf die total antisymmetrischen Tensorelemente, denn mit der totalen Antisymmetrie von  $\phi$  ist:

$$\phi_{\otimes}(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \phi(v_1, \dots, v_k).$$



Umgekehrt ist  $\Theta^k(\phi') = \phi' \circ \text{Alt}_k \circ \otimes_k$ . Auch hier erhalten wir

$$\begin{aligned} (\Theta^{k+1} \Delta_\Lambda^k)(\phi')(v_1, \dots, v_{k+1}) &= (\Delta_\Lambda^k \phi')(v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_R] \phi'(v_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{\Delta}^l \dots \wedge v_{k+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_R] (\Theta^k \phi')(v_1, \dots, \mathbf{\Delta}^l, \dots, v_{k+1}) \\ &= (\Delta^k \Theta^k)(\phi')(v_1, \dots, v_{k+1}), \end{aligned}$$

also insbesondere wieder  $\Delta^{k+1} \circ \Delta^k = 0$ , womit  $\Theta$  ein Kettenisomorphismus zwischen den Kokettenkomplexen  $(KC_\Lambda(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta_\Lambda)$  und  $(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$  ist.

Folgendes Lemma klärt weitere wichtige Eigenschaften obiger Definitionen.

**Lemma 3.1.2**

i.) Gegeben ein symmetrischer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$H^k(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}).$$

ii.) Seien  $\mathbb{V}$  und  $\mathcal{M}$  lokalkonvex und  $\Lambda^k(\mathbb{V})$   $\pi_k$  topologisiert. Dann bilden sowohl die  $\Upsilon^k$  als auch die  $\Theta^k$ , in beide Richtungen stetige Homomorphismen auf stetige Homomorphismen ab.

BEWEIS: i.) Für alle  $\phi \in KC^k(\mathbb{V}, \mathcal{M})$  ist

$$\begin{aligned} (\Delta^k \phi)(v_1, \dots, v_{k+1}) &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_R] \phi(v_1, \dots, \mathbf{\Delta}^l, \dots, v_{k+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} [u_l *_L - u_l *_L] \phi(v_1, \dots, \mathbf{\Delta}^l, \dots, v_{k+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii.) Sei  $\tilde{\phi} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}^{\text{cont}}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M})$  und  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ , dann folgt

$$q\left(\left(\Upsilon^k \tilde{\phi}\right)(\omega)\right) = q\left(\tilde{\phi}(1_e \otimes \omega)\right) \leq c \mathfrak{p}^2 \otimes p^k(1_e \otimes \omega) = c p^k(\omega),$$

was die Stetigkeit von  $\Upsilon^k(\tilde{\phi})$  zeigt. Sei umgekehrt  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{cont}}(\Lambda^k(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , so zeigt Lemma 2.1.4 ii.), dass

$$\begin{aligned} q\left(\left(\Upsilon_{-1}^k \phi\right)(a_e \otimes \omega)\right) &= q(a_e *_e \phi(\omega)) \leq c \mathfrak{p}^2(a_e) q'(\phi(\omega)) \\ &\leq c' \mathfrak{p}^2(a_e) p'^k(\omega) \leq c' \mathfrak{p}_k''(a_e \otimes \omega) \end{aligned}$$

mit einer Halbnorm  $p'' \geq p, p'$  gilt.

Für  $\Theta^k$  sei  $\phi' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{cont}}(\Lambda^k(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  wie eben, dann folgt:

$$\begin{aligned} q\left(\left(\Theta^k \phi\right)\left(v_1, \dots, v_k\right)\right) &= q\left(\phi\left(v_1 \wedge \dots \wedge v_k\right)\right) \leq c p^k\left(v_1 \wedge \dots \wedge v_k\right) \\ &\leq c p^k\left(v_1 \otimes \dots \otimes v_k\right) = c p\left(v_1\right) \dots p\left(v_k\right). \end{aligned}$$

Sei umgekehrt  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$ , dann sind  $\Theta_{-1}^k \phi = \phi_{\otimes} \big|_{\Lambda^k(\mathbb{V})}$  und  $\phi_{\otimes}$  stetig mit der Charakterisierung von  $\pi_k$  und es gilt:

$$q\left(\left(\Theta_{-1}^k \phi\right)\left(v_1 \wedge \dots \wedge v_k\right)\right) = q\left(\phi_{\otimes}\left(v_1 \wedge \dots \wedge v_k\right)\right) \leq c p^k\left(v_1 \wedge \dots \wedge v_k\right). \quad \blacksquare$$

Hiermit erhalten wir folgende Umformulierungen der Sätze 1.3.8, 2.2.9 und 2.3.7:

**Korollar 3.1.3**

i.) Gegeben ein  $S^{\bullet}(\mathbb{V}) - S^{\bullet}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$HH^k(S^{\bullet}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta).$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH^k(S^{\bullet}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}).$$

ii.) Gegeben ein lokalkonvexer,  $S^{\bullet}(\mathbb{V}) - S^{\bullet}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(S^{\bullet}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong H^k(KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta^c)$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH_{\text{cont}}^k(S^{\bullet}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}).$$

iii.) Gegeben ein vollständiger, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong HH_{\text{cont}}^k(S^{\bullet}(\mathbb{V}), \mathcal{M}).$$

Ist  $\mathcal{M}$  zudem symmetrisch, so ist:

$$HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}).$$

BEWEIS: Wegen  $\Delta_{\Lambda}^k = \Upsilon^{k+1} \partial_k^* \Upsilon_{-1}^k$  sowie  $\Delta^k = \Theta^{k+1} \Delta_{\Lambda}^k \Theta_{-1}^k$  und Lemma 3.1.2 ii.) bilden sowohl  $\Delta_{\Lambda}^k$  als auch  $\Delta^k$  stetige Elemente auf stetige Elemente ab. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der Kokettenkomplexe  $(KC_{\Lambda}^{\text{cont}}, \Delta_{\Lambda}^c)$  und  $(KC^{\text{cont}}, \Delta^c)$  sowie die Isomorphie ihrer Kohomologien. Die jeweils letzten Aussagen folgen mit Lemma 3.1.2 i.). ■

### 3.2. Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theoreme

In diesem Abschnitt werden wir die jeweils zweite Isomorphie in Korollar 3.1.3 explizit ausformulieren und erhalten Analoga zu dem bekannten Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem, siehe [Wal07, Prop 6.2.48 ], [CGD80].

#### Proposition 3.2.1

i.) Seien  $\mathbb{V}$  und  $\mathcal{M}$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume, wobei  $(\mathcal{M}, *)$  zusätzlich ein  $S^\bullet(\mathbb{V})$ -Modul ist. Dann besitzt jede  $\mathbb{K}$ -multilineare Abbildung  $\phi : \mathbb{V}^k \rightarrow \mathcal{M}$  eine eindeutig bestimmte, in jedem Argument derivative,  $\mathbb{K}$ -multilineare Fortsetzung  $\phi_D : S^\bullet(\mathbb{V})^k \rightarrow \mathcal{M}$ . Diese ist gegeben durch multilineare Fortsetzung von

$$\phi_D(\omega_1, \dots, \omega_k) = \sum_{m_1=1}^{n_1} \dots \sum_{m_k=1}^{n_k} \omega_1^{m_1} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k} * \phi((\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega_k)_{m_k})$$

auf ganz  $S^\bullet(\mathbb{V})^k$  mit  $\omega_i \in S^{n_i}(\mathbb{V})$  und  $\phi_D(\omega_1, \dots, 1_i, \dots, \omega_k) = 0$  für  $1 \leq i \leq k$ . Des Weiteren ist  $\phi_D$  genau dann total antisymmetrisch, wenn  $\phi$  total antisymmetrisch ist.

ii.) Gegeben eine kommutative Algebra  $\mathcal{A}$  und ein symmetrischer  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Sei weiter  $\text{Alt}_k : HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \rightarrow HC^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  definiert durch

$$\text{Alt}_k(\phi)(a_1, \dots, a_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \phi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}).$$

Dann gilt  $\text{Alt}_k \circ \delta^{k-1} = 0$ . Wegen  $\text{Alt}_k \circ \text{Alt}_k = \text{Alt}_k$  bedeutet dies insbesondere, dass ein total antisymmetrischer Hochschild-Kozyklus  $\phi$  nur dann auch ein Hochschild-Korand sein kann, wenn bereits  $\phi = 0$  gilt.

iii.) Sei  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$  und  $\xi^k = (\otimes_k^* \circ \Xi^k \circ G_k^* \circ \Upsilon_{-1}^k \circ \Theta_{-1}^k)$ . Sei weiter  $\mathcal{M}$  ein symmetrischer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul, dann gilt:

$$\xi^k(\phi) = \frac{1}{k!} \phi_D.$$

BEWEIS: i.) Mit der Symmetrie von  $\omega_1^{m_1} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k}$  ist  $\phi_D$  total antisymmetrisch, falls  $\phi$  total antisymmetrisch ist. Dies zeigt die letzte Aussage, da die umgekehrte Implikation trivial ist.

Für die Wohldefiniertheit sei  $\mathbb{V}^{n_i} \ni \omega_i^\times = ((\omega_i)_1, \dots, (\omega_i)_{n_i})$  mit  $1 \leq i \leq k$  und  $\omega_i^{m_i} \in S^{n_i-1}(\mathbb{V})$  das Element  $(\omega_i)_1 \vee \dots \vee (\omega_i)_{n_i}$ . Dann ist

$$\phi^{n_1, \dots, n_k}(\omega_1^\times, \dots, \omega_k^\times) = \sum_{m_1=1}^{n_1} \dots \sum_{m_k=1}^{n_k} \omega_1^{m_1} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k} * \phi((\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega_k)_{m_k})$$

eine wohldefinierte  $\mathbb{K}$ -multilineare Abbildung von  $\mathbb{V}^{[n_1 + \dots + n_k]}$  nach  $\mathcal{M}$ . Mit Lemma B.3.3 ii.) sowie der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes erhalten wir

eine lineare Fortsetzung

$$\phi_{\otimes}^{n_1, \dots, n_k} : T^{n_1}(\mathbb{V}) \otimes \dots \otimes T^{n_k}(\mathbb{V}) \mapsto \mathcal{M},$$

die verkettet mit  $\otimes_{n_1, \dots, n_k} : T^{n_1}(\mathbb{V}) \times \dots \times T^{n_k}(\mathbb{V}) \longrightarrow T^{n_1} \otimes \dots \otimes T^{n_k}$  die Eigenschaft

$$\phi_{\otimes}^{n_1, \dots, n_k} \circ \otimes_{n_1, \dots, n_k} \big|_{S^{n_1}(\mathbb{V}) \times \dots \times S^{n_k}(\mathbb{V})} = \phi_D \big|_{S^{n_1}(\mathbb{V}) \times \dots \times S^{n_k}(\mathbb{V})}$$

besitzt. Insgesamt folgt

$$\phi_D = \sum_{n_1, \dots, n_k} [\phi_{\otimes}^{n_1, \dots, n_k} \circ \otimes_{n_1, \dots, n_k}] \big|_{S^{n_1}(\mathbb{V}) \times \dots \times S^{n_k}(\mathbb{V})},$$

also die Wohldefiniertheit von  $\phi_D$ . Für die Derivativität rechnen wir

$$\begin{aligned} & \phi_D(\omega_1, \dots, \omega_l \vee \omega'_l, \dots, \omega_k) \\ &= \sum_{\substack{n_i \\ m_i=1 \\ i \neq l}}^{n_i} \sum_{\tilde{m}_l=1}^{\deg(\omega_l \vee \omega'_l)} \omega_1^{m_1} \vee \dots \vee (\omega_l \vee \omega'_l)^{\tilde{m}_l} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k} * \\ & \quad \phi((\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega_l \vee \omega'_l)_{\tilde{m}_l}, \dots, (\omega_k)_{m_k}) \\ &= \omega_l \vee \left[ \sum_{\substack{n_i \\ m_i=1 \\ i \neq l}}^{n_i} \sum_{m'_l=1}^{\deg(\omega_l)} \omega_1^{m_1} \vee \dots \vee \omega_l^{m'_l} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k} * \phi((\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega'_l)_{m'_l}, \dots, (\omega_k)_{m_k}) \right] \\ & \quad + \omega'_l \vee \left[ \sum_{\substack{n_i \\ m_i=1 \\ i \neq l}}^{n_i} \sum_{m_l=1}^{\deg(\omega_l)} \omega_1^{m_1} \vee \dots \vee \omega_l^{m_l} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k} * \phi((\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega_l)_{m_l}, \dots, (\omega_k)_{m_k}) \right] \\ &= \omega_l \vee \phi_D(\omega_1, \dots, \omega'_l, \dots, \omega_k) + \omega'_l \vee \phi_D(\omega_1, \dots, \omega_l, \dots, \omega_k), \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Moduleigenschaft von  $\mathcal{M}$  benutzt haben.

Für die Eindeutigkeit sei  $\tilde{\phi}$  eine weitere derivative Fortsetzung von  $\phi$ . Im Falle  $k = 1$  und mit  $\omega = \omega_1 \vee \dots \vee \omega_l$  erhalten wir sukzessive:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\omega) &= \omega^1 * \tilde{\phi}(\omega_1) + \omega_1 * \tilde{\phi}(\omega^1) \\ &= \omega^1 * \tilde{\phi}(\omega_1) + \omega^2 * \tilde{\phi}(\omega_2) + \omega_{1,2} * \tilde{\phi}(\omega^{1,2}) \\ &= \omega^1 * \tilde{\phi}(\omega_1) + \dots + \omega^{l-1} * \tilde{\phi}(\omega_{l-1}) + \omega_{1, \dots, l-1} * \tilde{\phi}(\omega^{1, \dots, l-1}) \\ &= \omega^1 * \tilde{\phi}(\omega_1) + \dots + \omega^l * \tilde{\phi}(\omega_l). \end{aligned}$$

Für  $k > 1$  zeigt induktives Anwenden obiger Relation, dass

$$\tilde{\phi}(\omega) = \sum_{m_1=1}^{n_1} \dots \sum_{m_k=1}^{n_k} \omega_1^{m_1} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k} * \tilde{\phi}((\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega_k)_{m_k})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m_1=1}^{n_1} \dots \sum_{m_k=1}^{n_k} \omega_1^{m_1} \vee \dots \vee \omega_k^{m_k} * \phi((\omega_1)_{m_1}, \dots, (\omega_k)_{m_k}) \\
 &= \phi_D(\omega),
 \end{aligned}$$

und die Derivativität erzwingt

$$\tilde{\phi}(\omega_1, \dots, 1_i, \dots, \omega_k) = \tilde{\phi}(\omega_1, \dots, 1 \vee 1_i, \dots, \omega_k) = 2\tilde{\phi}(\omega_1, \dots, 1_i, \dots, \omega_k),$$

also  $\tilde{\phi}(\omega_1, \dots, 1_i, \dots, \omega_k) = 0$ . Dies zeigt die Eindeutigkeit besagter derivativer Fortsetzung.

ii.) Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 &(\text{Alt}_k \circ \delta^{k-1})(\phi)(a_1, \dots, a_k) \\
 &= \text{Alt}_k(a_1 *_L \phi(a_2, \dots, a_k)) + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \text{Alt}_k(\phi(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{k+1})) \\
 &\quad + (-1)^k \text{Alt}_k(\phi(a_1, \dots, a_{k-1}) *_R a_k) \\
 &= \text{Alt}_k(a_1 *_L \phi(a_2, \dots, a_k)) + (-1)^k (-1)^{k-1} \text{Alt}_k(\phi(a_2, \dots, a_k) *_R a_1) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \text{Alt}_k(\phi(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_k)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Dabei verschwindet die letzte Summe wegen der Kommutativität von  $\mathcal{A}$ .

iii.) Sei  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 (\xi^k \phi)(u_1, \dots, u_k) &= \left( \otimes_k^* \circ \Xi^k \circ G_k^* \circ \Upsilon_{-1}^k \circ \Theta_{-1}^k \right) (\phi)(u_1, \dots, u_k) \\
 &= \left( \Xi^k \circ G_k^* \circ \Upsilon_{-1}^k \circ \Theta_{-1}^k \right) (\phi)(u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \\
 &= \left( G_k^* \circ \Upsilon_{-1}^k \circ \Theta_{-1}^k \right) (\phi)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 &= \left( \Upsilon_{-1}^k \circ \Theta_{-1}^k \right) (\phi)(G_k(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1)).
 \end{aligned}$$

Für  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}$  folgt

$$\begin{aligned}
 G_k(1 \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes 1) &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k i(1 \otimes 1 \otimes \overbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}^{k\text{-mal}} \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\
 &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k 1 \otimes 1 \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_k \\
 &= \frac{1}{k!} 1 \otimes 1 \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_k,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 (\xi^k \phi)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} (\Upsilon_{-1}^k \circ \Theta_{-1}^k) (\phi)(1 \otimes 1 \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\
 &= \frac{1}{k!} \Theta_{-1}^k (1 \otimes 1 *_e \phi)(1 \otimes 1 \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\
 &= \frac{1}{k!} \phi(v_1, \dots, v_k).
 \end{aligned}$$

Des Weiteren ist  $(\xi^k \phi)(u_1, \dots, u_k) = 0$ , falls  $u_i = 1$  für ein  $1 \leq i \leq k$ , da dann  $\delta(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) = 0$  gilt.

Sei abkürzend  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{K}_k, \mathcal{M}) \ni \tilde{\phi} = (\Upsilon_{-1}^k \circ \Theta_{-1}^k) (\phi)$ , dann folgt mit (1.19) und sukzessiver Anwendung von

$$\begin{aligned}
 \hat{i}(1 \otimes v \otimes 1) *_e m &= [t(v \otimes 1) + (1-t)(1 \otimes v)] *_e m \\
 &= t v *_L m + v *_R m - t v *_R m \\
 &= v *_L m,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dass

$$\begin{aligned}
 (\xi^k \phi)(u_1, \dots, u_j \vee u'_j, \dots, u_k) &= (\tilde{\phi} \circ G_k)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_j \vee u'_j \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \hat{i}_j(1 \otimes u_j \otimes 1) *_e \\
 &\quad \tilde{\phi} \left( \prod_{s \neq j} (i_s \circ \delta)(1 \otimes u_s \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u'_j \otimes 1) \right) \\
 &\quad + \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \hat{i}_j(1 \otimes u'_j \otimes 1) *_e \\
 &\quad \tilde{\phi} \left( \prod_{s \neq j} (i_s \circ \delta)(1 \otimes u_s \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_j \otimes 1) \right) \\
 &= u_j *_L (\tilde{\phi} \circ G_k)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u'_j \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) + \\
 &\quad u'_j *_L (\tilde{\phi} \circ G_k)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_j \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\
 &= u_j *_L (\xi^k \phi)(u_1, \dots, u'_j, \dots, u_k) + u'_j *_L (\xi^k \phi)(u_1, \dots, u_j, \dots, u_k).
 \end{aligned}$$

Mit *i.*) zeigt dies die Behauptung. Hierfür beachte man, dass wir  $\tilde{\phi}$  mit den Integralen vertauschen dürfen, da die Integrationen lediglich den verschiedenen  $t$ -Faktoren reelle Zahlen zuordnen und  $\tilde{\phi}$  nach Voraussetzung  $\mathbb{K}$ -linear ist. ■

Bevor wir zu dem Hauptresultat dieses Kapitels kommen, erinnern wir an folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\delta^{k-2}} & HC^{k-1} & \xrightarrow{\delta^{k-1}} & HC^k & \xrightarrow{\delta^k} & HC^{k+1} \xrightarrow{\delta^{k+1}} \cdots \\
 & & \downarrow \otimes_{k-1*} & & \downarrow \otimes_{k*} & & \downarrow \otimes_{k+1*} \\
 \cdots & \xrightarrow{\delta_{\otimes}^{k-2}} & HC_{\otimes}^{k-1} & \xrightarrow{\delta_{\otimes}^{k-1}} & HC_{\otimes}^k & \xrightarrow{\delta_{\otimes}^k} & HC_{\otimes}^{k+1} \xrightarrow{\delta_{\otimes}^{k+1}} \cdots \\
 & & \downarrow \Xi_{-1}^{k-1} & & \downarrow \Xi_{-1}^k & & \downarrow \Xi_{-1}^{k+1} \\
 \cdots & \xrightarrow{d_{k-1}^*} & X_{k-1}^* & \xrightarrow{d_k^*} & X_k^* & \xrightarrow{d_{k+1}^*} & X_{k+1}^* \xrightarrow{d_{k+2}^*} \cdots
 \end{array}$$

$\swarrow s_{k-1}^* \quad \swarrow s_k^*$

Hierbei ist  $HC^k = HC^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , sowie  $HC_{\otimes}^k = HC_{\otimes}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  die Tensorvariante des Hochschild-Komplexes. Der untere Komplex ist der durch Anwendung des  $\text{hom}_{\mathcal{A}^e}(\cdot, \mathcal{M})$ -Funktors erhaltenen Kokettenkomplex  $(X^*, d^*)$  mit  $X_k^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_k, \mathcal{M})$  und  $d_{k+1}^* \phi_k = \phi_k \circ d_{k+1}$ . Die  $s_k$  bezeichnen die in Lemma 2.2.8 definierten Homotopieabbildungen und  $\zeta^k: HC^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(X_k, \mathcal{M})$  den Kettenisomorphismus  $\zeta^k = \Xi_{-1}^k \circ \otimes_{k*}$ .

### Satz 3.2.2 (Hochschild-Kostant-Rosenberg)

- i.) Gegeben ein symmetrischer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Dann besitzt jede Kohomologiekategorie  $[\eta] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  genau einen total antisymmetrischen Repräsentanten  $\phi_D^{a,\eta}$ . Dieser ist derivativ in jedem Argument und gegeben durch  $\phi_D^{a,\eta} = \text{Alt}_k(\phi)$  für beliebiges  $\phi \in [\eta]$  mit  $\phi_D^{a,0} = 0$  für die 0-Klasse  $[0]$ .

Insgesamt gilt für alle  $\phi \in [\eta]$ :

$$\phi = \underbrace{\phi_D^{a,\eta}}_{\text{Alt}_k(\phi)} + \underbrace{\delta^{k-1}(\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi)}_{\phi - \text{Alt}_k(\phi)}. \quad (3.2)$$

- ii.) Gegeben ein symmetrischer, lokalkonvexer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Dann besitzt jedes  $[\eta_c] \in HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  genau einen total antisymmetrischen, stetigen Repräsentanten  $\phi_{c,D}^{a,\eta}$ . Dieser ist derivativ in jedem Argument und gegeben durch  $\phi_{c,D}^{a,\eta} = \text{Alt}_k(\phi_c)$  für beliebiges  $\phi_c \in [\eta_c]$  mit  $\phi_{c,D}^{a,0} = 0$  für die 0-Klasse  $[0_c]$ . Insgesamt gilt für alle  $\phi_c \in [\eta_c]$ :

$$\phi_c = \underbrace{\phi_{c,D}^{a,\eta}}_{\text{Alt}_k(\phi_c)} + \underbrace{\delta_c^{k-1}(\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c)}_{\phi_c - \text{Alt}_k(\phi_c)}. \quad (3.3)$$

- iii.) Gegeben ein vollständiger, symmetrischer, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Dann besitzt jedes  $[\hat{\eta}_c] \in HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  genau einen total antisymmetrischen, stetigen Repräsentanten  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}$ . Dieser ist derivativ in jedem Argument und gegeben durch  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta} = \text{Alt}_k(\hat{\phi}_c)$  für beliebiges  $\hat{\phi}_c \in [\hat{\eta}_c]$  mit  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,0} = 0$  für die 0-Klasse  $[\hat{0}_c]$ .

Insgesamt gilt für alle  $\hat{\phi}_c \in [\hat{\eta}_c]$ :

$$\hat{\phi}_c = \underbrace{\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}}_{\text{Alt}_k(\hat{\phi}_c)} + \underbrace{\hat{\delta}_c^{k-1} \left( \zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c \right)}_{\hat{\phi}_c - \text{Alt}_k(\hat{\phi}_c)} \quad \text{mit} \quad \phi_c = \hat{\phi}_c|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k}. \quad (3.4)$$

BEWEIS: i.) Zunächst ist die Existenz eines total antisymmetrischen Repräsentanten  $\phi_D^{a,\eta}$  gesichert, da die Abbildung  $\tilde{\xi}^k : \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}) \longrightarrow HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  ein Isomorphismus war und  $\xi^k(\phi)$  nach Proposition 3.2.1 iii.) total antisymmetrisch und derivativ ist. Mit Proposition 3.2.1 ii.) folgt

$$\text{Alt}_k(\phi) = \text{Alt}_k \left( \phi_D^{a,\eta} + \delta^{k-1}(\psi) \right) = \phi_D^{a,\eta} \quad \forall \phi \in [\eta], \quad (3.5)$$

und ebenso die Eindeutigkeit. Denn für total antisymmetrische  $\phi^a, \hat{\phi}^a \in [\eta]$  ist  $\phi^a - \hat{\phi}^a$  zudem exakt und somit  $(\phi^a - \hat{\phi}^a) = \text{Alt}_k(\phi^a - \hat{\phi}^a) = 0$ . Die Aussage  $\phi_D^{a,0} = 0$  ist dann wegen der Linearität von  $\tilde{\xi}^k$  trivial.

Für (3.2) sei  $\hat{\xi}^k = \Theta^k \circ \Upsilon^k \circ F_k^* \circ \Xi_{-1}^* \circ \otimes_{k*}$ , womit

$$\tilde{\xi}^k : HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$$

der zu  $\tilde{\xi}^k$  inverse Isomorphismus ist. Dann folgt

$$(\xi^k \circ \hat{\xi}^k)(\phi) = (\zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k)(\phi) = \phi_D^{a,\eta} = \text{Alt}_k(\phi),$$

was man unmittelbar daran sieht, dass jedes  $\phi \in [\eta]$  unter  $\hat{\xi}^k$  das gleiche Bildelement haben muss. Alternativ rechnet man  $\xi^k \circ \hat{\xi}^k = \text{Alt}_k$  auch explizit nach (vgl. Bemerkung 3.2.3 ii.). Nach Lemma 2.2.8 haben wir nun

$$\text{id}_{X_k^*} - \Omega_k^* = s_k^* d_{k+1}^* + d_k^* s_{k-1}^*, \quad (3.6)$$

also

$$\text{id}_{HC^k} - \zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k = \zeta_{-1}^k s_k^* d_{k+1}^* \zeta^k + \zeta_{-1}^k d_k^* s_{k-1}^* \zeta^k \quad (3.7)$$

und somit:

$$\text{id}_{HC^k} - \text{Alt}_k = \zeta_{-1}^k s_k^* \zeta^{k+1} \delta^k + \delta^{k-1} (\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k). \quad (3.8)$$

Anwenden von (3.8) auf einen Korand  $\phi \in [\eta]$  liefert

$$\phi - \text{Alt}_k(\phi) = \delta^{k-1} (\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi)$$

und zeigt somit die Behauptung.

ii.) Alle Isomorphismen aus obigem Diagramm sind ebenfalls Isomorphismen auf den stetigen Unterkomplexen. Nach Lemma 2.2.8 sind die  $s_k$  stetig und somit besagtes Diagramm auch auf die stetige Situation anwendbar. Des Weiteren sind

$$\tilde{\xi}_c^k : \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a,\text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}) \longrightarrow HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$$



und

$$\widetilde{\xi}_c^k : HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$$

mit  $\xi_c^k = \xi^k|_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a, \text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})}$  und  $\hat{\xi}_c^k = \hat{\xi}^k|_{HC_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})}$  zueinander inverse Isomorphismen. Hiermit folgen alle Behauptungen analog zu *i.*)

*iii.*) Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus Proposition 3.2.1 *ii.*). Des Weiteren haben wir nach Satz 2.3.7, vermöge Einschränkung und stetiger Fortsetzung, eine Isomorphie  $HC_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong HC_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , welche die Isomorphie  $HH_{\text{cont}}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  induziert. Mit der Linearität besagter Isomorphismen folgt dann unmittelbar:

$$\widehat{\text{Alt}_k(\phi_c)} = \text{Alt}_k(\hat{\phi}_c).$$

Nach *ii.*) ist für jedes  $\hat{\phi}_c \in [\hat{\eta}_c] \in HH^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  die Einschränkung,  $\phi_c = \hat{\phi}_c|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k}$ , darstellbar in der Form:

$$\phi_c = \phi_{c,D}^{a,\eta} + \delta_c^{k-1} \left( \zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c \right).$$

Hieraus folgt durch stetige Fortsetzung beider Seiten von (2.14), dass

$$\hat{\phi}_c = \hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta} + \delta_c^{k-1} \left( \widehat{\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi_c} \right),$$

wobei der erste Summand wegen  $\text{Alt}_k(\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}) = \widehat{\text{Alt}_k(\phi_{c,D}^{a,\eta})} = \hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}$  total antisymmetrisch ist. Mit (3.5) zeigt dies die Zuweisungen unter den geschweiften Klammern, da die Zerlegung  $\hat{\phi}_c = \text{Alt}_k(\hat{\phi}_c) + \hat{\phi}_c - \text{Alt}_k(\hat{\phi}_c)$  offenbar trivial ist.

Es bleibt nun lediglich die Derivationseigenschaft von  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}$  nachzuweisen. Hierfür rechnen wir mit den Stetigkeiten von  $*$  und  $*_L$ , der Definition von  $\hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}$  sowie der Derivativität von  $\phi_{c,D}^{a,\eta}$ :

$$\begin{aligned} & \hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}(\omega_1, \dots, \omega_l * \omega'_l, \dots, \omega_k) \\ &= \lim_{\Lambda} \phi_{c,D}^{a,\eta} \left( (\omega_1)_{\alpha_1}, \dots, (\omega_l)_{\alpha_l} \vee (\omega'_l)_{\alpha'_l}, \dots, (\omega_k)_{\alpha_k} \right) \\ &= \lim_{\Lambda} (\omega_l)_{\alpha_l} *_L \phi_{c,D}^{a,\eta} \left( (\omega_1)_{\alpha_1}, \dots, (\omega'_l)_{\alpha'_l}, \dots, (\omega_k)_{\alpha_k} \right) \\ & \quad + \lim_{\Lambda} (\omega'_l)_{\alpha'_l} *_L \phi_{c,D}^{a,\eta} \left( (\omega_1)_{\alpha_1}, \dots, (\omega_l)_{\alpha_l}, \dots, (\omega_k)_{\alpha_k} \right) \\ &= \omega_l *_L \hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}(\omega_1, \dots, \omega'_l, \dots, \omega_k) + \omega'_l *_L \hat{\phi}_{c,D}^{a,\eta}(\omega_1, \dots, \omega_l, \dots, \omega_k) \end{aligned}$$

mit Netzen  $S^\bullet(\mathbb{V}) \supseteq \{\omega_i\}_{\alpha_i \in J_i} \rightarrow \omega_i \in \text{Hol}(\mathbb{V}) \forall 1 \leq i \leq k$  und  $\{\omega'_l\}_{\alpha'_l \in J'_l} \rightarrow \omega'_l$  sowie  $\Lambda = \alpha_1 \times \dots \times (\alpha_l \times \alpha'_l) \times \dots \times \alpha_k$ . ■

**Bemerkung 3.2.3**

i.) Obiger Satz besagt nun nicht nur, dass jedes  $\phi \in [\eta] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  in der Form  $\phi = \phi_D^{a,\eta} + \delta^{k-1}(\psi)$  geschrieben werden kann, sondern legt uns sogar eine explizite Formel für die Berechnung eines derartigen  $\psi \in HC^{k-1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  in die Hand<sup>1</sup>. Nun ist die Berechnung wegen der rekursiven Definition von  $s_k$  im Allgemeinen recht kompliziert, jedoch im Rahmen der Deformationsquantisierung, bei der man zunächst sowieso nur an den ersten drei Hochschild-Kohomologien interessiert ist, durchaus ausführbar:

$k = 1$ : Hier ist  $s_0^* = 0$ , also  $[\eta] = \phi_D^{a,\eta}$  für alle  $[\eta] \in HH^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Dies ist auch konsistent damit, dass wegen

$$(\delta^0 m)(a) = a *_L m - m *_R a = 0 \quad \text{für alle } m \in \mathcal{M} = HC^0(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$$

$\text{im}(\delta^0) = 0$  und somit

$$HH^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) = \{\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \mid \phi \text{ ist derivativ}\}$$

gilt

$k = 2$ : In diesem Fall gilt  $s_1 = \bar{h}_1 - \overline{h_1 \Omega_1}$  mit

$$\bar{h}_1(x_0 \otimes x_1 \otimes x_2) = x_0 \otimes 1 \otimes x_1 \otimes x_2$$

für  $x_0, x_1, x_2 \in S^\bullet(\mathbb{V})$  und

$$\overline{h_1 \Omega_1}(x_0 \otimes x_1 \otimes x_2) = \sum_{p=1}^l x_0 \otimes \left( \left[ \int_0^1 dt_1 \hat{i}_1 (1 \otimes x_1^p \otimes 1) \right] *_e 1 \otimes (x_1)_p \otimes x_2 \right).$$

für  $\deg(x_1) = p$ , da

$$\begin{aligned} \Omega_1(x_0 \otimes x_1 \otimes x_2) &= F_1 \left( \sum_{p=1}^l \int_0^1 dt_1 i_1 (x_0 \otimes x_1^p \otimes x_2 \otimes (x_1)_p) \right) \\ &= \sum_{p=1}^l \left[ \int_0^1 dt_1 \hat{i}_1 (1 \otimes x_1^p \otimes 1) \right] *_e x_0 \otimes (x_1)_p \otimes x_2. \end{aligned}$$

Sei nun  $\phi \in HC^2(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und  $x \in S^\bullet(\mathbb{V})$  mit  $\deg(x) = p$ , so folgt:

$$\begin{aligned} (\zeta_{-1}^1 s_1^* \zeta^2 \phi)(x) &= (s_1^* \zeta^k \phi)(1 \otimes x \otimes 1) \\ &= \overbrace{(\zeta^2 \phi)(1 \otimes 1 \otimes x \otimes 1)}^{\phi(1,x)} \\ &\quad + \sum_{p=1}^l (\zeta^2 \phi) \left( 1 \otimes \left( \left[ \int_0^1 dt_1 \hat{i}_1 (1 \otimes x^p \otimes 1) \right] *_e 1 \otimes x_p \otimes 1 \right) \right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Dieses ist wegen  $\ker(\delta^{k-1}) \neq \{0\}$  nicht eindeutig bestimmt.

Für den letzten Summanden beachte man, dass

$$\begin{aligned} \hat{i}_1(1 \otimes x^p \otimes 1) &= t_1^{p-1} x^p \otimes 1 + \dots \\ &+ t_1^{(p-1)-l} (1 - t_1)^l \sum_{j_1, \dots, j_l}^{p-1} (x^p)^{j_1, \dots, j_l} \otimes (x^p)_{j_1, \dots, j_l} + \dots \\ &+ (1 - t_1)^{p-1} 1 \otimes x^p \\ \int_0^1 dt_1 t_1^{(p-1)-l} (1 - t_1)^l &= \binom{p}{l}^{-1} \text{ sowie } (\zeta^2 \phi)(1 \otimes x \otimes x_p \otimes y) = \phi(x, x_p) *_R y \\ \text{gilt. Hiermit folgt:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\zeta_{-1}^1 s_1^* \zeta^2 \phi)(x) &= \phi(1, x) + \sum_{p=1}^l \left[ \frac{1}{p} \phi(x^p, x_p) + \dots \right. \\ &+ \binom{p}{l}^{-1} \sum_{j_1, \dots, j_l}^{p-1} \phi((x^p)^{j_1, \dots, j_l}, x_p) *_R (x^p)_{j_1, \dots, j_l} + \dots \\ &\left. + \frac{1}{p} \phi(1, x_p) *_R x^p \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$k = n$ : Wir haben

$$s_n = \bar{h}_n - \bar{h}_n \bar{\Omega}_n - \overline{h_n s_{n-1} d_n}$$

und

$$\bar{h}_n(x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{n+1}) = x_0 \otimes 1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{n+1}.$$

Den zweiten Summanden berechnet man wie im Falle  $k = 2$ , wobei hier sehr viel mehr Kombinatorik zu berücksichtigen ist. Im Falle  $k = 3$  ist der letzte Summand gleich  $\overline{h_2 \bar{h}_1 d_2} - \overline{h_2 \bar{h}_1 \bar{\Omega}_1 d_2}$ , was ebenfalls noch berechenbar ist.

Analoge Aussagen gelten nun natürlich auch für die anderen beiden Fälle, wobei für  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  natürlich die Vervollständigung von (3.9) zu nehmen ist. Des Weiteren ist  $s^*$  auch für nicht symmetrische Bimoduln  $\mathcal{M}$  gewinnbringend einsetzbar. Hier erhalten wir mit (3.7) für  $\phi \in [\eta] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , dass

$$\phi = \zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi + \left( \phi - \zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi \right) = \tilde{\phi} + \delta^{k-1} (\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi)$$

mit  $\tilde{\phi} = \zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k \phi \in [\eta]$ . Hierfür beachte man, dass wir in obiger Formel für  $\zeta_{-1}^1 s_1^* \zeta^2 \phi$  explizit zwischen  $*_R$  und  $*_L$  unterschieden haben.

- ii.) Für endlich-dimensionales  $\mathbb{V}$  ist Satz 3.2.2 i.), von der expliziten Formel für den Korand, ein bereits wohl bekanntes Resultat. Ebenso für den Fall, dass  $\mathcal{A}$  die Algebra der  $C^\infty(M)$  der glatten Funktionen auf einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist, vgl. [Wal07], [CGD80]. Die Multivektorfelder nehmen hierbei

den Platz der total antisymmetrischen, in jedem Argument derivativen Repräsentanten ein und in der Tat liefert dies eine zutreffende Analogie, da jeder derartige Repräsentant  $\phi_D^{a,\eta}$  ein total antisymmetrisches Element in  $\text{DiffOp}_k^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , den Differentialoperator der Ordnung 1, ist<sup>2</sup>.

- iii.) Betrachtet man (3.4), so könnte man den Wunsch verspüren,  $\widehat{\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k}$  durch  $\hat{\zeta}_{-1}^{k-1} \hat{s}_{k-1}^* \hat{\zeta}^k$  zu ersetzen. Hierbei bezeichnen  $\hat{\zeta}^k$  und  $\hat{\zeta}_{-1}^k$  die für  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  analog zu  $\zeta^k$  und  $\zeta_{-1}^k$  definierten Isomorphismen. Dies ist jedoch ohne weiteres nicht möglich, da wir für die Definition von  $s$  explizit die Kettenabbildung  $G$  benutzt haben und somit die Einschränkung  $\hat{s}_{k-1}|_{X_c^{k-1}}$  im Allgemeinen nach  $\hat{X}_c^k$  und nicht ausschließlich nach  $X_c^k$  abbildet. Hierbei bezeichnet  $(X_c, d_c)$  den zu  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  gehörigen Bar-Komplex und  $(\hat{X}_c, \hat{d}_c)$  dessen Vervollständigung.
- iv.) Wir möchten für Satz 3.2.2 i.) noch einmal auf andere Weise argumentieren. Hierfür seien Eindeutigkeit und Existenz bereits gezeigt. Dann ist mit  $\delta^k \phi = 0$  ebenfalls  $(\delta^k \circ \text{Alt}_k)(\phi) = 0$ , also für einen Kozyklus  $\phi \in [\eta]$  auch  $\text{Alt}_k(\phi)$  ein Kozyklus. Dies bedeutet  $\text{Alt}_k(\phi) = \phi_D^{a,\eta'} \in [\eta']$  mit der Eindeutigkeit des total antisymmetrischen Repräsentanten in  $[\eta']$ . Insbesondere ist dann  $\text{Alt}_k(\phi)$  derivativ, und die Aufgabe besteht nun darin,  $[\eta'] = [\eta]$  nachzuweisen. Hierfür beachten wir, dass

$$\begin{aligned} (\hat{\xi}^k \phi)(v_1, \dots, v_k) &= (\Upsilon^k \circ F_k^* \circ \Xi_{-1}^k \circ \otimes_{k*})(\phi)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\ &= (F_k^* \circ \Xi_{-1}^k \circ \otimes_{k*})(\phi)(1 \otimes 1 \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\ &= (\Xi_{-1}^k \circ \otimes_{k*})(\phi)(F_k(1 \otimes 1 \otimes v_1 \wedge \dots \wedge v_k)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\Xi_{-1}^k \circ \otimes_{k*})(\phi)(1 \otimes v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} \otimes 1) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) (\otimes_{k*} \phi)(v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= k! \text{Alt}_k(\phi)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \end{aligned}$$

also  $(\hat{\xi}^k \phi) = k! \text{Alt}_k(\phi|_{\mathbb{V}^k}) = k! \text{Alt}_k(\phi)|_{\mathbb{V}^k}$ . Proposition 3.2.1 iii.) zeigt dann  $(\xi^k \circ \hat{\xi}^k)(\phi) = (\text{Alt}_k(\phi)|_{\mathbb{V}^k})_D$ , und mit der Derivativität von  $\text{Alt}_k(\phi)$  zeigt Proposition 3.2.1 i.), dass  $(\xi^k \circ \hat{\xi}^k)(\phi) = \text{Alt}_k(\phi)$ . Nun gilt  $\xi^k \circ \hat{\xi}^k: [\eta] \rightarrow [\eta]$ , also  $\text{Alt}_k(\phi) \in [\eta]$ .

---

<sup>2</sup>vgl. Proposition 4.1.2

## 4. Differentielle Hochschild-Kohomologien

In diesem Kapitel wollen wir uns dem Begriff der differentiellen Hochschild-Koketten zuwenden und die Rolle der Kettenabbildungen  $F^*$  und  $G^*$  in diesem Rahmen diskutieren. Im Großen und Ganzen soll es hier darum gehen, nützliche Relationen und Ideen zusammenzutragen, die als Basis für weitergehende Analysen benutzt werden können. Wir werden dabei besonderen Wert auf die Diskussion etwaiger Fallstricke legen, die aus der zu naiven Betrachtung des Unterkomplex-Begriffes resultieren.

### 4.1. Multidifferentialoperatoren und symmetrische Bimoduln

In diesem Abschnitt soll es zunächst darum gehen, den Begriff des Multidifferentialoperators in voller algebraischer Allgemeinheit kennenzulernen (vgl. [Wal07, Anhang A]), um hiermit die differentiellen Hochschildkomplexe sowie die stetigen, differentiellen Hochschildkomplexe für symmetrische Bimoduln zu definieren.

Hierfür sei daran erinnert, dass wir unter einer  $\mathbb{K}$ -Algebra immer einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit assoziativer,  $\mathbb{K}$ -bilinear er Algebra multiplikation verstehen. Ist von einem  $\mathcal{A}$ -Modul  $\mathcal{M}$  die Rede, so meinen wir einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\mathbb{K}$ -bilinear er  $\mathcal{A}$ -Modul-Multiplikation, wobei die Linearität im Modul-Element für die Wohldefiniertheit des Multi-differentialoperator-Begriffes unabdingbar ist. Befinden wir uns im Folgenden in der Situation einer kommutativen Algebra, so behandeln wir  $\mathcal{M}$  als  $\mathcal{A}$ -Linksmodul und bezeichnen die Modul-Multiplikation mit  $*_L$ , wohlwissend, dass dies für derartige Algebren keine Einschränkung bedeutet, siehe Anhang A.1. Ist  $\mathcal{A}$  kommutativ, so setzen wir  $1_{\mathcal{A}} *_L m = m$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  voraus.

Als Teilresultat dieses Abschnittes erhalten wir dann die Isomorphie der stetigen, differentiellen Kohomologien der Algebren  $\text{Hol}(\mathbb{V})$  und  $S^\bullet(\mathbb{V})$  für derartige vollständige, lokalkonvexe, symmetrischen  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimoduln.

#### Definition 4.1.1 (Multidifferentialoperator)

Gegeben eine assoziative, kommutative  $\mathbb{K}$ -Algebra  $(\mathcal{A}, *)$  und ein  $\mathcal{A}$ -Modul  $(\mathcal{M}, *_L)$ . Dann sind die Multidifferentialoperatoren  $\text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  mit Argumenten im  $k$ -fachen kartesischen Produkt  $\mathcal{A}^k$  von  $\mathcal{A}$  und Werten in  $\mathcal{M}$ , der Multiordnung  $L = (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{Z}^k$ , induktiv definiert durch

$$\text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \{0\} \quad \forall L \in \mathbb{Z}^k \text{ mit } l_i < 0 \text{ für ein } 1 \leq i \leq k$$

sowie

$$\text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \left\{ D \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M}) \mid \forall a \in \mathcal{A}, \forall 1 \leq i \leq k \text{ gilt :} \right. \\ \left. L_a \circ D - D \circ L_a^i \in \text{DiffOp}_k^{L-e_i}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \right\}.$$

Dabei bedeutet  $L - m \cdot e_i = (l_1, \dots, l_i - m, \dots, l_k)$ ,  $L_a \circ D(a_1, \dots, a_k) = a *_L D(a_1, \dots, a_k)$  und  $(D \circ L_a^i)(a_1, \dots, a_k) = D(a_1, \dots, a_i * a, \dots, a_k)$ . Weiterhin setzen wir  $|L| = \sum_i l_i$  mit  $|L| = -1$  falls  $l_i < 0$  für ein  $1 \leq i \leq k$  und schreiben  $L \leq L'$  falls  $l_i \leq l'_i \forall 1 \leq i \leq k$  sowie  $L = n$  falls  $l_i = n \forall 1 \leq i \leq k$ .

### Proposition 4.1.2

Unter den Voraussetzungen obiger Definition gilt:

i.) Sei

$$\begin{aligned} \llbracket_i^a : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M}) \\ D &\longmapsto L_a \circ D - D \circ L_a^i. \end{aligned}$$

Dann gilt  $\llbracket_i^a \circ \llbracket_j^b = \llbracket_j^b \circ \llbracket_i^a$  für alle  $a, b \in \mathcal{A}$  und alle  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ .

ii.) Sei  $D \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M})$ . Dann ist genau dann  $D \in \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ , wenn:

$$\llbracket_i^{a_1, \dots, a_{l_i+1}} D = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k, \forall a_1, \dots, a_{l_i+1} \in \mathcal{A}. \quad (4.1)$$

Hierbei steht  $\llbracket_i^{a_1, \dots, a_{l_i+1}} : \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \longrightarrow 0$  abkürzend für  $\llbracket_i^{a_1} \circ \dots \circ \llbracket_i^{a_{l_i+1}}$ .

iii.) Für  $K \leq L$  ist

$$\text{DiffOp}_k^K(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \subseteq \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

und

$$\text{DiffOp}_k^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \bigcup_{L \geq 0} \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

ein filtrierter Untervektorraum von  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M})$ .

iv.) Jedes  $\text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und somit  $\text{DiffOp}_k^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  wird vermöge  $a *_L D = L_a \circ D$  zu einem  $\mathcal{A}$ -Linksmodul. Des Weiteren ist  $D *_R^i a = D \circ L_a^i$  für alle  $1 \leq i \leq k$  eine Rechtsmodul-Multiplikation auf jedem  $\text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und somit auf  $\text{DiffOp}_k^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .

v.) Sei  $D \in \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und  $L \prec_i P := (l_1, \dots, l_{i-1}, l_i + p_1, \dots, l_i + p_m, l_{i+1}, \dots, l_k)$ . Dann ist:

$$a) \quad D_{\mathcal{A}} *_L D \in \text{DiffOp}_{k+m}^{(P,L)}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \text{ für } D_{\mathcal{A}} \in \text{DiffOp}_m^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}),$$

$$b) \quad D \circ_i D_{\mathcal{A}} \in \text{DiffOp}_{k+m-1}^{L \prec_i P}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \text{ für } D_{\mathcal{A}} \in \text{DiffOp}_m^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}).$$

Insbesondere ist  $\text{id}_{\mathcal{A}} *_L D \in \text{DiffOp}_{k+1}^{(0,L)}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und  $D \circ_i * \in \text{DiffOp}_{k+1}^{L \prec_i (0,0)}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ . Hierfür beachte man, dass jede assoziative Algebra  $\mathcal{A}$  insbesondere ein  $\mathcal{A}$ -Linksmodul ist.

vi.) Sei  $D \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M})$  *derivativ in jedem Argument*. Dann ist  $D \in \text{DiffOp}_k^1(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .

BEWEIS: i.) Zunächst ist das Bild unter  $\llbracket_i^a$  in der Tat  $\mathbb{K}$ -multilinear, da  $*_L$  linear im  $\mathcal{M}$ -Argument und  $*$  bilinear ist. Die behauptete Vertauschungsrelation folgt unmittelbar aus der Kommutativität von  $\mathcal{A}$ .

ii.) Sei  $D \in \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ . Dann gilt per Definition:

$$\llbracket_i^{a_1, \dots, a_{l_i+1}} D \in \text{DiffOp}_k^{(l_1, \dots, -1_i, \dots, l_k)}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = 0.$$

Für die umgekehrte Implikation sei  $\llbracket_j^a D = 0$  für alle  $1 \leq j \leq k$ . Dann folgt unter Berücksichtigung von  $a *_L 0 = 0_{\mathbb{K}} \cdot [a *_L 0] = 0$ , dass

$$D' = \llbracket_1^{a_1} \circ \dots \circ \llbracket_k^{a_k} D = 0 \in \text{DiffOp}_k^{-1}(\mathcal{A}, \mathcal{M}),$$

also  $\llbracket_2^{a_2} \circ \dots \circ \llbracket_k^{a_k} D \in \text{DiffOp}_k^{(0, -1, \dots, -1)}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und induktiv  $D \in \text{DiffOp}_k^0(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ . Sei nun die Aussage für  $L$  korrekt und (4.1) für  $L' = L + e_i$  erfüllt. Sei weiter  $D' = \llbracket_i^a D$ , so ist nach Voraussetzung  $\llbracket_i^{a_1, \dots, a_{l_i+1}} D' = 0$  und für  $j \neq i$  folgt:

$$\llbracket_j^{a_1, \dots, a_{l_j+1}} D' \stackrel{i.)}{=} \llbracket_i^a \circ \llbracket_j^{a_1, \dots, a_{l_j+1}} D' = \llbracket_i^a 0 = 0.$$

Dies zeigt  $D' \in \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und somit  $D \in \text{DiffOp}_k^{L'}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .

iii.) Die erste Inklusion folgt unmittelbar aus ii.) und  $\llbracket_i^a 0 = 0$ . Für die zweite Behauptung beachte man, dass die  $\llbracket_i^a$  lineare Abbildungen sind und somit (4.1) ein lineares Kriterium ist. Hiermit ist  $\text{DiffOp}_k^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  ein Untervektorraum von  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M})$  und besagte Inklusion liefert die Filtrationseigenschaft.

iv.) Dies folgt sofort aus ii.),  $\llbracket_i^a 0 = 0$  sowie den Vertauschungsrelationen  $\llbracket_i^b [L_a D] = L_a [\llbracket_i^b D]$  und  $\llbracket_i^b [D \circ L_a^i] = [\llbracket_i^b D] \circ L_a^i$ .

v.) Zunächst sind alle Kompositionen  $\mathbb{K}$ -multilineare Abbildungen nach  $\mathcal{M}$ .

a) Mit der Kommutativität von  $\mathcal{A}$  und den Modul-Multiplikationsregeln gilt:

$$\llbracket_j^a [D_{\mathcal{A}} *_L D] = [a *_L D_{\mathcal{A}}] *_L D - [D_{\mathcal{A}} \circ L_a^j] *_L D = [\llbracket_j^a D_{\mathcal{A}}] *_L D$$

für  $1 \leq j \leq m$  und

$$\llbracket_j^a [D_{\mathcal{A}} *_L D] = D_{\mathcal{A}} *_L [a *_L D] - D_{\mathcal{A}} *_L [D \circ L_a^j] = D_{\mathcal{A}} *_L [\llbracket_j^a D]$$

für  $m+1 \leq j \leq k+m$ . Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus ii.).

b) Seien  $|L|, |P| \neq -1$ , andernfalls ist die Aussage trivial. Wir zeigen diese per Induktion über  $|L| + |P|$ . Sei hierfür  $L = m = 0$ . Dann ist  $\llbracket_j^a D = 0$  für  $1 \leq j \leq k$  und  $\llbracket_j^a D_{\mathcal{A}} = 0$  für  $1 \leq j \leq m$ . In den Fällen  $1 \leq j < i$  und  $i+m-1 < j \leq k+m-1$  folgt

$$\llbracket_j^a [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] = [\llbracket_j^a D] \circ_i D_{\mathcal{A}} = 0$$

und für  $i \leq j \leq i + m - 1$  gilt

$$\begin{aligned} [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] \circ L_a^j &= D \circ_i [D_{\mathcal{A}} \circ L_a^{j-i+1}] = D \circ_i [a *_L D_{\mathcal{A}}] = [D \circ L_a^i] \circ D_{\mathcal{A}} \\ &= a *_L [D \circ_i D_{\mathcal{A}}], \end{aligned}$$

also  $\llbracket_j^a [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] = 0$ . Sei nun die Aussage für  $|L| + |P| - 1$  korrekt. Dann gilt in den Fällen  $1 \leq j < i$  und  $i + m - 1 < j \leq k + m - 1$ :

$$\llbracket_j^a [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] = \llbracket_j^a D \rrbracket \circ_i D_{\mathcal{A}} \in \text{DiffOp}_{k+m-1}^{[L-e_j] \prec_i P}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

nach Induktionsvoraussetzung und für  $i \leq j \leq i + m - 1$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \llbracket_j^a [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] &= a *_L [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] - \overbrace{[D \circ L_a^i] \circ_i D_{\mathcal{A}} + [D \circ L_a^i] \circ_i D_{\mathcal{A}} - [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] \circ L_a^j}^0 \\ &= [a *_L D] \circ_i D_{\mathcal{A}} - [D \circ L_a^i] \circ_i D_{\mathcal{A}} + D \circ_i [a *_L D_{\mathcal{A}}] - D \circ_i [D_{\mathcal{A}} \circ L_a^{j-i+1}] \\ &= \underbrace{\llbracket_i^a D \rrbracket \circ_i D_{\mathcal{A}}}_{\text{DiffOp}_{k+m-1}^{[L-e_i] \prec_i P}(\mathcal{A}, \mathcal{M})} + \underbrace{D \circ_i \llbracket_{j-i+1}^a D_{\mathcal{A}} \rrbracket}_{\text{DiffOp}_{k+m-1}^{L \prec_i [P-e_{(j-i+1)}]}(\mathcal{A}, \mathcal{M})}. \end{aligned}$$

Hierbei gelten die Zugehörigkeiten unter den geschweiften Klammern nach Induktionsvoraussetzung.

Im ersten Fall:  $j \neq \{i, \dots, i + m - 1\}$  ist  $[L - e_j] \prec_i P = [L \prec_i P] - e_j$  und für  $i \leq j \leq i + m - 1$  gilt  $L \prec_i [P - e_{(j-i+1)}] = [L \prec_i P] - e_j$  sowie  $[L - e_i] \prec_i P = [L \prec_i P] - e_i - \dots - e_{i+m-1} \leq [L \prec_i P] - e_j$ . Mit iii.) zeigt dies  $\llbracket_j^a [D \circ_i D_{\mathcal{A}}] \in \text{DiffOp}_{k+m-1}^{[L \prec_i P] - e_j}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  und Definition 4.1.1 liefert schließlich  $D \circ_i D_{\mathcal{A}} \in \text{DiffOp}_{k+m-1}^{L \prec_i P}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .

Die letzte Behauptung folgt mit dem bereits Gezeigten und mit  $\text{id}_{\mathcal{A}} \in \text{DiffOp}_1^0(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  sowie  $*$   $\in \text{DiffOp}_2^0(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ .

vi.) Für jedes  $1 \leq j \leq k$  ist  $\llbracket_j^a D \rrbracket(a_1, \dots, a_k) = -a_i *_L D(a_1, \dots, a, \dots, a_k)$ , also  $\llbracket_j^{a,b} D = 0$ . ■

### Bemerkung 4.1.3

Die obige rein algebraische Definition der Multidifferentialoperatoren scheint zunächst etwas befremdlich. Es lässt sich jedoch zeigen (vgl. [Wal07, Anhang A]), dass diese für die assoziative, kommutative Algebra  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  gerade mit der üblichen analytischen Definition übereinstimmt. Beispielsweise ist genau dann  $D \in \text{DiffOp}_1^n(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ , wenn ein mit der auf  $M$  gegebenen differenzierbaren Struktur verträglicher  $C^\infty$ -Atlas  $\mathbf{A}$  von  $M$  derart existiert, dass für jede Karte  $(U, x) \in \mathbf{A}$ , in den Indizes  $i_1, \dots, i_k$  symmetrische Funktionen  $D_U^{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(U)$  existieren, so dass:

$$D(f|_U) = \sum_{r=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{1}{r!} D_U^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial^r f|_U}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}.$$



**Definition 4.1.4 (Stetige Multidifferentialoperatoren)**

Gegeben eine assoziative, kommutative, lokalkonvexe  $\mathbb{K}$ -Algebra  $(\mathcal{A}, *)$  und ein lokal-konvexer  $\mathcal{A}$ -Modul  $(\mathcal{M}, *_L)$ , so sind die stetigen Multidifferentialoperatoren induktiv definiert durch

$$\text{DiffOp}_k^{L, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \{0\} \quad \forall L \in \mathbb{Z}^k \text{ mit } l_i < 0 \text{ für ein } 1 \leq i \leq k$$

sowie

$$\text{DiffOp}_k^{L, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \left\{ D \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{cont}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M}) \mid \forall a \in \mathcal{A}, \forall 1 \leq i \leq k \text{ gilt :} \right. \\ \left. L_a \circ D - D \circ L_a^i \in \text{DiffOp}_k^{L-e_i, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \right\}.$$

**Bemerkung 4.1.5**

- i.) Proposition 4.1.2 überträgt sich sinngemäß auf  $\text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ , da in der Situation von Definition 4.1.4 sowohl  $*$  als auch  $*_L$  stetige Abbildungen sind und somit  $\square_i^a : \text{DiffOp}_k^{L, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \longrightarrow \text{DiffOp}_k^{L-e_i, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  gilt. In der Tat gewährleistet dies im Induktionsschritt zu Proposition 4.1.2 ii.), dass  $D' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{cont}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M})$  stetig ist. Proposition 4.1.2 ii.) zeigt dann insbesondere, dass genau dann  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{L, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  gilt, wenn  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{cont}}(\mathcal{A}^k, \mathcal{M})$  und  $\phi \in \text{DiffOp}_k^L(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  ist.
- ii.) Man beachte, dass die Forderung der Stetigkeit der Differentialoperatoren in der Tat eine echte Zusatzbedingung liefert. Für den Fall  $\mathcal{M} = \mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , in welchem  $\mathcal{A}$  durch die üblichen Halbnormen

$$p_{K,l} : \phi \mapsto \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq l}} \left| \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} \right|$$

mit  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $l \in \mathbb{N}$  topologisiert ist, sind Multidifferentialoperatoren eben nur wegen ihrer analytischen Form, also ihrer unmittelbaren Ähnlichkeit zu obigen Halbnormen stetig. Wählt man hier ein anderes Halbnormensystem, so ist deren Stetigkeit auch für diese Algebra im Allgemeinen nicht gewährleistet. Um dies noch deutlicher zu machen, sei dem Leser nahegelegt zu versuchen, die Stetigkeit der Derivation  $i_u \in \text{DiffOp}_1^1(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}))$  mit

$$i_u : v_1 \vee \dots \vee v_k \longmapsto \sum_{i=1}^k |u(v_i)| \cdot v_1 \vee \dots \blacktriangle^i \dots \vee v_k$$

und  $i_u(1) = 0$  für beliebiges  $u \in \mathbb{V}^*$  nachzuweisen. Im Falle  $u \in V'$  ist dies allerdings kein Problem.

**Lemma 4.1.6**

Gegeben ein vollständiger, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V})$ -Modul  $\mathcal{M}$ . Dann gilt

$$\text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong \text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$$

vermöge Einschränkung und stetiger Fortsetzung.

BEWEIS: Mit Proposition 4.1.2 ii.) folgt unmittelbar  $\phi|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k} \in \text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  für alle  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Für den Rest der Behauptung reicht es zu zeigen, dass  $\hat{\phi} \in \text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , falls  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Hierzu beachten wir, dass

$$\begin{aligned} \llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{\bullet_1, \dots, \bullet_l} \phi : (a_1, \dots, a_{l+k}) &\longmapsto \llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{a_1, \dots, a_l} \phi(a_{l+1}, \dots, a_{k+l}) \quad \text{sowie} \\ \llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{\bullet_1, \dots, \bullet_l} \hat{\phi} : (a_1, \dots, a_{l+k}) &\longmapsto \llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{a_1, \dots, a_l} \hat{\phi}(a_{l+1}, \dots, a_{k+l}) \end{aligned}$$

beide stetig sind und  $\left( \llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{\bullet_1, \dots, \bullet_l} \hat{\phi} \right) \Big|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k} = \widehat{\llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{\bullet_1, \dots, \bullet_l} \phi}$  gilt. Mit der Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung zeigt dies  $\llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{\bullet_1, \dots, \bullet_l} \hat{\phi} = \widehat{\left( \llbracket_{i_1, \dots, i_l}^{\bullet_1, \dots, \bullet_l} \phi \right)}$  und für  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{L, \text{cont}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  folgt

$$\llbracket_{i_1, \dots, i_{l+1}}^{\bullet_1, \dots, \bullet_{l+1}} \hat{\phi} = \widehat{\left( \llbracket_{i_1, \dots, i_{l+1}}^{\bullet_1, \dots, \bullet_{l+1}} \phi \right)} = 0,$$

also  $\hat{\phi} \in \text{DiffOp}_k^{L, \text{cont}}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . ■

**Definition 4.1.7 (Differentieller Hochschild-Komplex)**

Gegeben eine kommutative Algebra  $\mathcal{A}$  und ein symmetrischer  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul  $\mathcal{M}$ . Wir betrachten die  $\mathbb{K}$ -Vektorräume

$$HC_{\text{diff}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \{0\} & k < 0 \\ \mathcal{M} & k = 0 \\ \text{DiffOp}_k^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}) & k \geq 1 \end{cases}$$

sowie die durch (1.1) definierten  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen:

$$\delta_{\text{diff}}^k : HC_{\text{diff}}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \longrightarrow HC_{\text{diff}}^{k+1}(\mathcal{A}, \mathcal{M}).$$

Hierfür beachte man, dass im symmetrischen Falle  $*_L = *_R$  gilt und Proposition 4.1.2 v.) dann zeigt, dass die  $\delta_{\text{diff}}^k$  in der Tat in die behauptete Menge abbilden. Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{M}$  lokalkonvex, so definieren wir

$$HC_{c,d}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) := \begin{cases} \{0\} & k < 0 \\ \mathcal{M} & k = 0 \\ \text{DiffOp}_k^{\bullet, \text{cont}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) & k \geq 1 \end{cases}$$

sowie die zugehörigen Kettendifferentiale:

$$\delta_{c,d}^k : HC_{c,d}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \longrightarrow HC_{c,d}^{k+1}(\mathcal{A}, \mathcal{M}).$$

Abschließend erhalten wir folgendes Korollar:

**Korollar 4.1.8**

- i.) Sei  $\mathcal{M}$  ein symmetrischer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  wohldefinierte Kettenabbildungen  $\tilde{\xi}^k$  und  $\tilde{\hat{\xi}}^k$  zwischen  $(HC_{\text{diff}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{\text{diff}})$  und  $(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Des Weiteren ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\tilde{\hat{\xi}}^k$  surjektiv.

- ii.) Sei  $\mathcal{M}$  ein symmetrischer, lokalkonvexer  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  wohldefinierte Kettenabbildungen zwischen  $(HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{c,d})$  und  $(KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Des Weiteren ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\hat{\xi}^k$  surjektiv.
- iii.) Sei  $\mathcal{M}$  ein vollständiger, symmetrischer, hausdorffscher, lokalkonvexer  $\text{Hol}(\mathbb{V}) - \text{Hol}(\mathbb{V})$ -Bimodul, so sind  $(HC_{c,d}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \hat{\delta}_{c,d})$  und  $(HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{c,d})$  kettenisomorph vermöge Einschränkung und stetiger Fortsetzung. Des Weiteren gilt:

$$HH_{c,d}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \cong HH_{c,d}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}).$$

BEWEIS: i.), ii.) Zunächst ist klar, dass sowohl  $\hat{\xi}^k: HC_{\text{diff}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \rightarrow KC(\mathbb{V}, \mathcal{M})$  als auch  $\tilde{\xi}^k: HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \rightarrow KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M})$  gilt. Des Weiteren ist das Bild unter  $\xi^k$  nach Proposition 3.2.1 iii.) derivativ in jedem Argument, also nach Proposition 4.1.2 vi.) ein Element in  $\text{DiffOp}_k^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Dies zeigt  $\xi^k: KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}) \rightarrow HC_{\text{diff}}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , und da  $\xi^k$  im lokal konvexen Fall stetige Elemente auf stetige Elemente abbildet, gilt gleichermaßen  $\xi^k: KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}) \rightarrow HC_{c,d}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Die Injektivität von  $\tilde{\xi}^k$  sowie die Surjektivität von  $\hat{\xi}^k$  folgen in beiden Fällen wieder unmittelbar aus Lemma 1.3.12 i.).

iii.) Dies folgt mit Lemma 4.1.6 analog zu Satz 2.3.7, da auch hier für

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{c,d}^k: HC_{c,d}^k(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) &\longrightarrow HC_{c,d}^{k+1}(\text{Hol}(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \\ \delta_{c,d}^k: HC_{c,d}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) &\longrightarrow HC_{c,d}^{k+1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \end{aligned}$$

gilt, dass:

$$\hat{\delta}_{c,d}^k(\hat{\phi}) \Big|_{S^\bullet(\mathbb{V})^{k+1}} = \delta_{c,d}^k(\hat{\phi} \Big|_{S^\bullet(\mathbb{V})^k}). \quad \blacksquare$$

#### Bemerkung 4.1.9

Es ist im Allgemeinen nicht klar, dass die  $\tilde{\xi}^k$  Isomorphismen sind, dass also

$$\begin{aligned} HH_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}) \cong HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \\ HH_{c,d}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{a,\text{cont}}(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}) \cong HH_{\text{cont}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \end{aligned}$$

gilt. Dies ist ein Phänomen, dass bei Unterkomplexen immer auftreten kann. Hierfür beachte man, dass es wegen  $\ker(\delta_{\text{diff}}^k) \subseteq \ker(\delta^k)$  Elemente  $[\nu] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  geben kann, in denen kein  $[\eta_{\text{diff}}] \in HH_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  enthalten ist. Wegen

$$HH_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \xrightarrow{\tilde{\xi}^k} \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M}) \cong HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$$

und der Surjektivität von  $\tilde{\xi}^k$  ist die bei uns aber nicht der Fall. Des Weiteren kann es wegen  $\text{im}(\delta_{\text{diff}}^{k-1}) \subseteq \text{im}(\delta^{k-1})$  passieren, dass  $[\eta_{\text{diff}}], [\mu_{\text{diff}}] \in HH_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  existieren, für die sowohl  $[\eta_{\text{diff}}] \neq [\mu_{\text{diff}}]$  als auch  $[\eta_{\text{diff}}], [\mu_{\text{diff}}] \subseteq [\nu] \in HH^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  gilt.

In unserem Fall ist eben dies das Problem, da  $\tilde{\xi}^k$  nicht notwendigerweise injektiv ist. Abhilfe würde hier die Homotopie  $s$  schaffen, wenn gewährleistet wäre, dass

$$\zeta_{-1}^k s_k^* \zeta^{k+1}: HC_{\text{diff}}^{k+1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \longrightarrow HC_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$$

gilt. In der Tat erhielten wir dann analog zu (3.8), dass

$$\text{id}_{HC_{\text{diff}}^k} - \xi^k \circ \hat{\xi}^k = (\zeta_{-1}^k s_k^* \zeta^{k+1}) \delta^k + \delta^{k-1} (\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k), \quad (4.2)$$

also  $\text{id}_{HC_{\text{diff}}} \sim \xi^k \circ \hat{\xi}^k$  und  $\text{id}_{HH_{\text{diff}}^k} = \widetilde{\xi^k \circ \hat{\xi}^k} = \tilde{\xi}^k \circ \tilde{\hat{\xi}}^k$ , mithin die Surjektivität von  $\tilde{\xi}^k$  und die Injektivität von  $\tilde{\hat{\xi}}^k$ . In der Tat könnte dann obiger Fall nicht mehr eintreten, denn für  $[\eta_{\text{diff}}], [\mu_{\text{diff}}] \subseteq [\nu]$  wäre jede Differenz  $\phi = \phi_\eta - \phi_\mu$  von Repräsentanten  $\phi_\eta \in [\eta_{\text{diff}}]$  und  $\phi_\mu \in [\mu_{\text{diff}}]$  ein differentieller Korand. Unter Berücksichtigung von (4.2) erhielten wir  $\phi = \delta^{k-1} (\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi)$  mit  $\zeta_{-1}^{k-1} s_{k-1}^* \zeta^k \phi \in HC_{\text{diff}}^{k-1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , also  $[\eta_{\text{diff}}] = [\mu_{\text{diff}}]$ .

Nun gilt, dass  $\zeta_{-1}^k h_k^* \zeta^{k+1}$ ,  $\zeta_{-1}^k \Omega_k^* \zeta^k$  und  $\zeta_{-1}^k d_k^* \zeta^k$  die Eigenschaft besitzen, differentielle Elemente auf differentielle Elemente abzubilden und dass die  $\mathcal{A}^e$ -Linearisierung einer derartigen Abbildung weiterhin diese Eigenschaft besitzt. Jedoch dürfen wir in  $\zeta_{-1}^k \Omega_k^* h_k^* \zeta^{k+1}$  nicht einfach die Eins  $\zeta^k \circ \zeta_{-1}^k$  einfügen, da  $h_k$  nicht  $\mathcal{A}^e$ -linear ist. Nun könnte trotzdem  $\zeta_{-1}^k \Omega_k^* h_k^* \zeta^{k+1}: HC_{\text{diff}}^{k+1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \longrightarrow HC_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  richtig sein. Jedoch ist

$$\begin{aligned} \left( \zeta_{-1}^k \Omega_k^* h_k^* \zeta^{k+1} \right) (\phi)(u_1, \dots, u_k) &= \left( \Omega_k^* h_k^* \zeta^{k+1} \right) (\phi)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1) \\ &= \left( h_k^* \zeta^{k+1} \right) (\phi)(\Omega_k(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1)) \\ &= \left( \zeta^{k+1} \phi \right) (1 \otimes \Omega_k(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1)), \end{aligned}$$

also die  $\mathcal{A}^e$ -Linearität von  $(\zeta^{k+1} \phi)$  in Kombination mit (3.1) nur noch für Elemente  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{(0, l_2, \dots, l_{k+1})}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  nutzbringend einsetzbar. In diesen Fällen ist dann  $(\zeta_{-1}^k \Omega_k^* h_k^* \zeta^{k+1}) (\phi) \in \text{DiffOp}_k^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , was man mit der  $\mathcal{A}^e$ -Linearität von  $F_k$ , durch eine ähnliche Rechnung wie in Proposition 3.2.1, sieht.

Im Falle  $\mathcal{A} = C^\infty(V)$  mit einer konvexen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  kann gezeigt werden (vgl. [Wei09, Kapitel 5]), dass  $\zeta_{-1}^k s_k^* \zeta^{k+1}$  tatsächlich die gewünschte Eigenschaft besitzt, differentielle Elemente auf differentielle Elemente abzubilden. In diesem Fall ist dies aber der speziellen Beschaffenheit des Differentialoperator-Begriffes geschuldet, der wegen der endlichen Dimension von  $\mathbb{R}^n$ , konsistent zur algebraischen Definition, durch Verkettung von partiellen Ableitungen definiert werden kann, siehe [Wei09, Def 5.3.2]. Insbesondere gelten dann Kettenregeln der Form  $\partial_y f(tx + (1-t)y) = f'(tx + (1-t)y)(1-t)$ , die im Beweis zu [Wei09, Prop 5.6.6] von essentieller Bedeutung sind. Um also die Vorgehensweise aus [Wei09, Kapitel 5] auf unsere Situation zu übertragen, könnte man sich im differentiellen Hochschild-Komplex von Anfang an auf Differentialoperatoren

beschränken, die als endliche Summe in der Form

$$\phi = \sum_{l=0}^s \sum_{|\alpha|=l} \delta_{\alpha_1}^{|\alpha_1|} \dots \delta_{\alpha_k}^{|\alpha_k|} *_L m^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$$

mit Derivationen  $\delta_{\alpha_i} \in \text{DiffOp}_1 1(S^\bullet(\mathbb{V}), S^\bullet(\mathbb{V}))$  geschrieben werden können. Hierbei darf  $k$  für jeden Summanden variieren, und mit  $\delta_{\alpha_i}^{|\alpha_i|}$  ist die  $|\alpha_i|$ -fache Anwendung von  $\delta_{\alpha_i}$  gemeint. Dabei ist die Reihenfolge der Verkettungen wegen Derivationseigenschaft der  $\delta_{\alpha_i}$  unwichtig. Für eine Derivation  $\delta$  gilt dann mit  $\delta_2(x \otimes y) := x \otimes \delta(y)$  ebenfalls

$$\delta_2(\hat{i}_1(1 \otimes x \otimes 1)) = (1 - t_1)\hat{i}_1(1 \otimes \delta(x) \otimes 1),$$

also die Kettenregel. Um nun jedoch sicherzustellen, dass  $G_k^*$  und somit  $\xi^k$  in diesen Unterkomplex abbildet, wird man sich im allgemeinen auch auf einen Unterkomplex von  $(\mathcal{K}^*, \partial^*)$  beschränken müssen.

Abseits dieser ganzen Diskussion besteht natürlich durchaus auch die Möglichkeit, dass  $\text{id}_{HC_{\text{diff}}} \sim \xi^k \circ \hat{\xi}^k$  vermöge anderer Homotopieabbildung  $s: HC_{\text{diff}}^{k+1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \rightarrow HC_{\text{diff}}^k(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  gilt. Dies würde dann die Surjektivität von  $\tilde{\xi}^k$  und die Injektivität von  $\hat{\xi}^k$  zeigen.

## 4.2. Differentielle Bimoduln

Motiviert durch Korollar 4.1.8 wollen wir in diesem Abschnitt der Frage nachgehen, inwiefern obige Aussagen auch für nicht-symmetrische Bimoduln zu erwarten sind. Seien hierfür  $(\mathcal{A}, *)$  eine kommutative Algebra und  $(\mathcal{M}, *_L)$  ein  $\mathcal{A}$ -Modul wie im letzten Abschnitt. Für  $1 \leq l \leq s$  seien  $\mathbb{K}$ -bilineare Abbildungen  $D_l: \mathcal{A} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  derart gegeben, dass folgende Konsistenzbedingungen erfüllt sind:

- a.)  $D_l(a, b *_L m) = b *_L D_l(a, m) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \forall m \in \mathcal{M}, \forall 1 \leq l \leq s$
- b.) Für festes  $a \in \mathcal{A}$  und  $1 \leq l \leq s$  bezeichne  $D_l^a: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  die  $*_L$ -lineare Abbildung  $D_l^a: m \mapsto D_l(a, m)$ . Sei des Weiteren  $D_{l_1, \dots, l_p}^{a_1, \dots, a_p} = D_{l_1}^{a_1} \circ \dots \circ D_{l_p}^{a_p}$ , dann soll für alle  $a_i \in \mathcal{A}$  gelten, dass:

$$D_{l_1, \dots, l_p}^{a_1, \dots, a_p} = 0, \quad \text{falls } \sum_{i=1}^p l_i > s.$$

- c.) Für  $1 \leq l \leq s$  gilt:

$$\begin{aligned} D_l(a * b, m) &= b *_L D_l(a, m) + D_1(b, D_{l-1}(a, m)) + D_2(b, D_{l-2}(a, m)) + \dots \\ &\quad + D_{l-2}(b, D_2(a, m)) + D_{l-1}(b, D_1(a, m)) + a *_L D_l(b, m). \end{aligned}$$

- d.) Für fixiertes  $m \in \mathcal{M}$  ist  $D_l(\cdot, m) \in \text{DiffOp}_1^l(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall 1 \leq l \leq s.$

Hiermit erhalten wir folgendes Lemma:

**Lemma 4.2.1**

Gegeben eine kommutative Algebra  $(\mathcal{A}, *)$  und ein  $\mathcal{A}$ -Modul  $(*_L, \mathcal{M})$ . Seien weiter  $D_1, \dots, D_s$  Abbildungen, die i.) - iv.) erfüllen. Dann wird  $\mathcal{M}$  vermöge

$$*_R = *_L + D_1 + \dots + D_s$$

zu einem  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul.

BEWEIS: Mit **a.)** folgt unmittelbar, dass  $a *_L (m *_R b) = (a *_L m) *_R b$  gilt, und für die Bedingung  $m *_R (a * b) = (m *_R a) *_R b$  rechnen wir:

$$(m *_R a) *_R b = [a *_L m + D_1(a, m) + D_2(a, m) + \dots + D_s(a, m)] *_R b.$$

Durch Ausmultiplizieren und Anwenden von **a.)** und **b.)** ergibt dies:

$$\begin{aligned} & (a * b) *_L m + a *_L D_1^b(m) + a *_L D_2^b(m) + \dots + a *_L D_{s-1}^b(m) + a *_L D_s^b(m) \\ & + b *_L D_1^a(m) + D_{1,1}^{b,a}(m) + D_{2,1}^{b,a}(m) + \dots + D_{s-1,1}^{b,a}(m) + \cancel{D_{s,1}^{b,a}(a, m)} \\ & + b *_L D_2^a(m) + D_{1,2}^{b,a}(m) + D_{2,2}^{b,a}(m) + \dots + \cancel{D_{s-1,2}^{b,a}(m)} + \cancel{D_{s,2}^{b,a}(m)} \\ & + b *_L D_3^a(m) + D_{1,3}^{b,a}(m) + D_{2,3}^{b,a}(m) + \dots + \cancel{D_{s-1,3}^{b,a}(m)} + \cancel{D_{s,3}^{b,a}(m)} \\ & \vdots \\ & + b *_L D_{s-1}^a(m) + D_{1,s-1}^{b,a}(m) + \cancel{D_{2,s-1}^{b,a}(m)} + \dots + \cancel{D_{s-1,s-1}^{b,a}(m)} + \cancel{D_{s,s-1}^{b,a}(m)} \\ & + b *_L D_s^a(m) + \cancel{D_{1,s}^{b,a}(m)} + \cancel{D_{2,s}^{b,a}(m)} + \dots + \cancel{D_{s-1,s}^{b,a}(m)} + \cancel{D_{s,s}^{b,a}(m)}. \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen der Diagonalen von links unten nach recht oben folgt mit **c.)**:

$$\begin{aligned} (m *_R a) *_R b &= (a * b) *_L m + \left[ b *_L D_1(a, m) + a *_L D_1(b, m) \right] \\ &+ \left[ b *_L D_2(a, m) + D_1(b, D_1(a, m)) + a *_L D_2(b, m) \right] + \dots \\ &+ \left[ b *_L D_s(a, m) + D_1(b, D_{s-1}(a, m)) + D_2(b, D_{s-2}(a, m)) + \dots \right. \\ &\quad \left. + D_{s-2}(b, D_2(a, m)) + D_{s-1}(b, D_1(a, m)) + a *_L D_s(b, m) \right] \\ &= (a * b) *_L m + D_1(a * b, m) + \dots + D_s(a * b, m) \\ &= m *_R (a * b). \end{aligned}$$

Schließlich ist  $*_R$  bilinear, da  $*_L$  und alle  $D_l$  bilinear sind. Des Weiteren folgt für alle  $l$  mit  $a = b = 1$  aus **c.)**, dass  $D_l(1, m) = 0$ , also  $m *_R 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}} *_L m$  gilt, womit  $\mathcal{M}, *_L, *_R$  alle unsere Anforderungen an einen  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul erfüllt. ■

Wir geben nun die zentrale Definition dieses Kapitels:

**Definition 4.2.2**

Gegeben die kommutative Algebra  $S^\bullet(\mathbb{V})$  und ein  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul wie in Lemma 4.2.1. Wir nennen  $\mathcal{M}$  einen differentiellen Bimodul über  $S^\bullet(\mathbb{V})$ , falls folgende Zusatzbedingung erfüllt ist:

**e.)** Für alle  $m \in \mathcal{M}$  und alle  $\omega \in S^\bullet(\mathbb{V})$  mit  $\deg(\omega) < l$  ist  $D_l(\omega, m) = 0$ .

Mit **c.)** ist dies gleichbedeutend mit der Forderung, dass für alle  $m \in \mathcal{M}$  und alle  $l \geq 2$   $D_l(v, m) = 0$ , falls  $\deg(v) = 1$ .

**Bemerkung 4.2.3**

Sei  $\mathcal{M}$  ein differentieller  $S^\bullet(\mathbb{V}) - S^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul, so ist mit  $\text{DiffOp}_k^\bullet(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  im Folgenden immer der Differentialoperator-Begriff bezüglich der  $*_L$ -Multiplikation gemeint.

**Beispiel 4.2.4**

i.) Sei  $(\mathcal{M}, *_L)$  ein  $S^\bullet(\mathbb{V})$ -Modul,  $s = 2$  und  $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ . Sei weiter  $i_u$  wie in Bemerkung 4.1.5 und:

$$\begin{aligned} \text{sh}: (m_1, m_2, m_3) &\longmapsto (0, m_1, m_2) \\ *_L: (\omega, (m_1, m_2, m_3)) &\longmapsto (\omega *_L m_1, \omega *_L m_2, \omega *_L m_3). \end{aligned}$$

Wir setzen  $D_1(\omega, \widetilde{m}) = \sqrt{2} \cdot i_u(\omega) *_L \text{sh}^1(\widetilde{m})$  und  $D_2(\omega, \widetilde{m}) = i_u^2 *_L \text{sh}^2(\widetilde{m})$ . Dann sind **a.)** und **b.)** per Definition erfüllt, und für **c.)** rechnet man:

$$\begin{aligned} D_2(v \vee w, \widetilde{m}) &= i_u(v \vee i_u(w) + w \vee i_u(v)) *_L \text{sh}^2(\widetilde{m}) \\ &= w \vee i_u^2(v) *_L \text{sh}^2(\widetilde{m}) + 2 \cdot i_u(v) \vee i_u(w) *_L \text{sh}^2(\widetilde{m}) \\ &\quad + v \vee i_u^2(w) *_L \text{sh}^2(\widetilde{m}) \\ &= w *_L D_2(v, \widetilde{m}) + D_1(w, D_1(v, \widetilde{m})) + v *_L D_2(w, \widetilde{m}). \end{aligned}$$

Des Weiteren ist  $D_2(v, \widetilde{m}) = i_u^2(v) *_L \text{sh}^2(\widetilde{m}) = (0, 0, 0)$  falls  $\deg v = 1$ , und für **d.)** beachte man, dass  $i_u \in \text{DiffOp}_1^1(S^\bullet(V), S^\bullet(V))$  sowie  $i_u^2 \in \text{DiffOp}_1^2(S^\bullet(V), S^\bullet(V))$ , womit

$$\begin{aligned} \llbracket_2^{a,b} D_1(\cdot, m) &= \left( \llbracket_2^{a,b} i_u \right) *_L \text{sh}^1(\widetilde{m}) = 0 \\ \llbracket_3^{a,b,c} D_2(\cdot, m) &= \left( \llbracket_3^{a,b,c} i_u^2 \right) *_L \text{sh}^2(\widetilde{m}) = 0. \end{aligned}$$

ii.) Sei  $(\mathcal{A}, *) = (C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \cdot)$  und  $\mathcal{M} = \text{DiffOp}_1^s(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ , versehen mit den Modul-Multiplikationen aus Proposition 4.1.2 iii.). Dann ist  $\mathcal{M}$  in der Tat ein  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul, und unter Verwendung der Multiindex-Konventionen

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n} \quad \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$$

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$$

für  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  erhalten wir aus Bemerkung 4.1.3, dass wir jedes  $m \in \text{DiffOp}_1^s(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  in der Form  $m = \sum_{l=0}^s \sum_{|\alpha|=l} \phi_\alpha \partial^\alpha$  mit Elementen  $\phi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  schreiben können. Mit der Derivationseigenschaft der partiellen Ableitungen folgt

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} g \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

und wir erhalten für  $m = \phi_\alpha \partial^\alpha$ , dass

$$(m *_R f)(g) = \phi_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} g = \sum_{l=0}^{|\alpha|} \sum_{\substack{|\beta|=l \\ \beta \leq \alpha}} \overbrace{\phi_\alpha \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta}}^{D_l(f, m)} g$$

mit  $D_0(f, m) = f \cdot \phi_\alpha \partial^\alpha = f *_L m$  gilt. Hierbei sind die  $D_l$  ganz allgemein durch lineare Fortsetzung auf ganz  $\text{DiffOp}_1^s(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  von

$$D_l: (f, \phi_\alpha \partial^\alpha) \mapsto \sum_{\substack{|\beta|=l \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \phi_\alpha \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} \in \text{DiffOp}_1^{|\alpha|-l}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$$

mit  $D_l|_{\mathcal{A} \times \text{DiffOp}_1^{m \leq l}(\mathcal{A}, \mathcal{A})} = 0$  definiert. Insgesamt zeigt dies **a.)** und **b.)**. Nun ist  $D_l(\cdot, m)$  linear und wegen Proposition 4.1.2 *ii.)* folgt **d.)** unmittelbar aus:

$$\prod_{l+1}^{f_1, \dots, f_{k+1}} D_l(\cdot, m) = \sum_{\substack{|\beta|=l \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \phi_\alpha \left( \prod_{l+1}^{f_1, \dots, f_{k+1}} \partial^\beta \right) \partial^{\alpha-\beta} = 0.$$

Für **c.)** beachten wir, dass  $\mathcal{M}$  ein Bimodul ist, also  $m *_R (f \cdot g) = (m *_R f) *_R g$  gilt. Wir betrachten nun das Schema aus Lemma 4.2.1, welches wir durch ausmultiplizieren von  $(m *_R f) *_R g$  erhalten. Es ist dann zu zeigen, dass die  $l$ -te Diagonale mit  $D_l(f \cdot g, m)$  übereinstimmt. Hierfür reicht, es diese Aussage für Elemente der Form  $m_k = \sum_{|\alpha|=k} \phi_\alpha \partial^\alpha$  mit  $k \leq s$ , welche wir im Folgenden als „exakt der Ordnung  $k$ “ bezeichnen wollen, nachzuweisen. Denn jedes  $m \in \text{DiffOp}_1^s(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  kann offenbar als eindeutige Linearkombination solcher Elemente dargestellt werden. Für ein derartiges  $m_k$  ist  $D_l(f, m_k)$  exakt der Ordnung  $k - l$  und ebenfalls ist  $D_{l_2}(g, D_{l_1}(f, m_k))$  exakt der Ordnung  $k - l_1 - l_2$ . Hiermit enthält die  $l$ -te Diagonale nur exakte Elemente der Ordnung  $l$ , was **c.)** zeigt. Schränken wir uns auf die Unteralgebra  $\text{Pol}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  ein, so ist schließlich auch **e.)** erfüllt.

*iii.)* In Analogie zu *ii.)* betrachten wir den Unterraum  $\mathcal{M}$  aller Differentialoperatoren



$m \in \text{DiffOp}_1^s(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}))$ , die als eine endliche Summe der Form

$$m = \sum_{l=0}^s \sum_{|\alpha|=l} \delta_{\alpha_1}^{|\alpha_1|} \dots \delta_{\alpha_k}^{|\alpha_k|}$$

mit Derivationen  $\delta_{\alpha_i} \in \text{DiffOp}_1(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}))$  geschrieben werden können. Hierbei ist in der zweiten Summe  $\alpha \in \mathbb{N}^k$ , wobei  $k$  für jeden Summanden variieren darf. Mit  $\delta_{\alpha_i}^{|\alpha_i|}$  ist die  $|\alpha_i|$ -fache Anwendung von  $\delta_{\alpha_i}$  gemeint, und wegen der Derivationseigenschaft ist die Reihenfolge Verkettungen unwichtig. Der Summand für  $l = 0$  soll dann lediglich aus einem Element  $m_0 \in \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$  bestehen. Vermöge Proposition 4.1.2 wird  $\mathcal{M}$  zu einem  $\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}) - \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul, und wir erhalten für  $m = \delta_{\alpha_1}^{|\alpha_1|} \dots \delta_{\alpha_k}^{|\alpha_k|} =: \delta^\alpha$  mit  $|\alpha| \leq s$  sowie  $v, w \in \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$ , dass

$$(m *_R v)(w) = \sum_{\alpha \geq \beta \in \mathbb{N}^k} \binom{\alpha}{\beta} \delta^\beta(v) \vee \delta^{\alpha-\beta}(w) = \sum_{l=0}^{|\alpha|} \overbrace{\sum_{\substack{|\beta|=l \\ \alpha \geq \beta \in \mathbb{N}^k}} \binom{\alpha}{\beta} \delta^\beta(v) \vee \delta^{\alpha-\beta}(w)}^{D_l(v, m)},$$

also  $*_R = \sum_{l=1}^s D_l$  mit Abbildungen

$$D_l: (v, \delta^\alpha) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } l > |\alpha|, \\ \sum_{\substack{|\beta|=l \\ \alpha \geq \beta \in \mathbb{N}^k}} \binom{\alpha}{\beta} \delta^\beta(v) \vee \delta^{\alpha-\beta} & \text{sonst.} \end{cases}$$

gilt. Nun folgt **a.)** unmittelbar aus  $\delta^0(v) = v$  und **b.)** mit  $\deg(D_l(v, m)) = |\alpha| - l$ . Die Bedingungen **d.)** und **c.)** folgen analog zu **ii.)** und **e.)** ist wegen  $\delta^\alpha(v) = 0$  für  $\deg(v) < |\alpha|$  ebenfalls klar.

#### Lemma 4.2.5

Für differentielle  $\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}) - \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimoduln  $\mathcal{M}$  erhalten wir nun folgende Aussagen:

i.) Sei  $m \in \mathcal{M}$  und  $u \in \mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V})$ , dann gilt:

$$\hat{i}(1 \otimes u \otimes 1) *_e m = u *_L m + (1-t)D_1(u, m) + \dots + (1-t)^s D_s(u, m).$$

ii.) Sei  $\tilde{\phi} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  und  $\mathcal{D} = D_{l_1, \dots, l_k}^{a_1, \dots, a_k}$  mit  $q = s - \sum_{i=1}^p l_i \geq 0$ . Dann ist die Abbildung

$$\tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}}: (u_1, \dots, u_k) \mapsto \mathcal{D} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \tilde{\phi} \left( \prod_{s=1}^k (i_s \circ \delta)(1 \otimes u_s \otimes 1) \right)$$

für jedes  $p(t) \in \text{Pol}(t_1, \dots, t_k)$  ein Element in  $\text{DiffOp}_k^{q+1}(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Des Weiteren ist  $\xi^k(\phi) \in \text{DiffOp}_k^{s+1}(\mathbf{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  für alle  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^a(\mathbb{V}^k, \mathcal{M})$ .

iii.) Unter den gegebenen Voraussetzungen sind die Kokettenkomplexe aus Definition 4.1.7 ebenfalls wohldefiniert.

BEWEIS: i.) Wir zeigen dies per Induktion über  $\deg(u)$ . Sei hierfür  $\deg(v) = 1$ , so erhalten wir mit **e.)**:

$$\begin{aligned}\hat{i}(1 \otimes v \otimes 1) *_e m &= [tv \otimes 1 + (1-t)1 \otimes v] *_e m \\ &= tv *_L m + (1-t)v *_L m + (1-t)D_1(v, m) \\ &= v *_L m + (1-t)D_1(v, m) + \dots + (1-t)^s D_s(v, m).\end{aligned}$$

Sei nun die Aussage für  $\deg(u) = l$  korrekt, dann folgt gleichermaßen:

$$\begin{aligned}\hat{i}(1 \otimes v \vee u \otimes 1) *_e m &= \hat{i}(1 \otimes v \otimes 1) *_e (\hat{i}(1 \otimes u \otimes 1) *_e m) \\ &= [tv \otimes 1 + (1-t)1 \otimes v] *_e [u *_L m + (1-t)D_1(u, m) + \dots + (1-t)^l D_l(u, m)] \\ &= tv \vee u *_L m + (1-t)v \vee u *_L m + (1-t)u *_L D_1(v, m) + \cancel{t(1-t)v *_L D_1(u, m)} \\ &\quad + (1-t)^2 v *_L D_1(u, m) + (1-t)^2 D_1(v, D_1(u, m)) + \cancel{t(1-t)^2 v *_L D_2(u, m)} \\ &\quad + (1-t)^3 v *_L D_2(u, m) + (1-t)^3 D_1(v, D_2(u, m)) + \cancel{t(1-t)^3 v *_L D_3(u, m)} \\ &\quad + (1-t)^4 v *_L D_3(u, m) + (1-t)^4 D_1(v, D_3(u, m)) + \dots \\ &\quad + t(1-t)^l v *_L D_l(u, m) + (1-t)^{l+1} v *_L D_l(u, m) + (1-t)^{l+1} D_1(v, D_l(u, m)).\end{aligned}$$

Fasst man den jeweils letzten Term mit den ersten beiden Termen der nächsten Reihe zusammen, so folgt mit  $(1-t)^m = t(1-t)^m + (1-t)^{m+1}$ :

$$\begin{aligned}\hat{i}(1 \otimes v \vee u \otimes 1) *_e m &= v \vee u *_L m \\ &\quad + (1-t)u *_L D_1(v, m) + (1-t)v *_L D_1(u, m) \\ &\quad + (1-t)^2 D_1(v, D_1(u, m)) + (1-t)^2 v *_L D_2(u, m) \\ &\quad + (1-t)^3 D_1(v, D_2(u, m)) + (1-t)^3 v *_L D_3(u, m) \quad (4.3) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (1-t)^l D_1(v, D_{l-1}(u, m)) + (1-t)^l v *_L D_l(u, m) \\ &\quad + (1-t)^{l+1} D_1(v, D_l(u, m)).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von **c.)** und **e.)** erhalten wir hieraus im Falle  $l < s$ :

$$\begin{aligned}\hat{i}(1 \otimes v \vee u \otimes 1) *_e m &= v \vee u *_L m + (1-t)D_1(v \vee u, m) + \dots + (1-t)^{l+1} D_{l+1}(v \vee u, m) \\ &\quad + \cancel{(1-t)^{l+2} D_{l+2}(v \vee u, m)} + \dots + \cancel{(1-t)^s D_s(v \vee u, m)}\end{aligned}$$

Im Falle  $\deg(u) \geq s$  gilt (4.3) mit  $s$  anstelle von  $l$  und wegen **b.)** verschwindet der letzte Summand. Dies zeigt die Behauptung.

ii.) Für den Induktionsanfang sei  $q = 0$ . Dann folgt mit

$$\tilde{\phi}_{\omega_j} := \tilde{\phi} \left( \prod_{s \neq j} (i_s \circ \delta)(1 \otimes u_s \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes \omega_j \otimes 1) \right)$$

für  $u_1, \dots, u_k, \omega \in S^\bullet(\mathbb{V})$ , dass

$$\begin{aligned} & \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}}(u_1, \dots, u_j \vee u'_j, \dots, u_k) \\ &= \mathcal{D} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \hat{i}_j(1 \otimes u_j \otimes 1) *_e \tilde{\phi} \left( \prod_{s \neq j} (i_s \circ \delta)(1 \otimes u_s \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u'_j \otimes 1) \right) \\ & \quad + \mathcal{D} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \hat{i}_j(1 \otimes u'_j \otimes 1) *_e \tilde{\phi} \left( \prod_{s \neq j} (i_s \circ \delta)(1 \otimes u_s \otimes 1) \cdot (i_j \circ \delta)(1 \otimes u_j \otimes 1) \right) \\ &= \mathcal{D} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \left[ u_j *_L \tilde{\phi}_{u'_j} + (1-t_j) D_1^{u_j}(\tilde{\phi}_{u'_j}) + \dots + (1-t_j)^s D_s^{u_j}(\tilde{\phi}_{u'_j}) \right] \\ & \quad + \mathcal{D} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \left[ u'_j *_L \tilde{\phi}_{u_j} + (1-t_j) D_1^{u'_j}(\tilde{\phi}_{u_j}) + \dots + (1-t_j)^s D_s^{u'_j}(\tilde{\phi}_{u_j}) \right] \\ &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \mathcal{D} \left[ u_j *_L \tilde{\phi}_{u'_j} + (1-t_j) D_1^{u_j}(\tilde{\phi}_{u'_j}) + \dots + (1-t_j)^s D_s^{u_j}(\tilde{\phi}_{u'_j}) \right] \\ & \quad + \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \mathcal{D} \left[ u'_j *_L \tilde{\phi}_{u_j} + (1-t_j) D_1^{u'_j}(\tilde{\phi}_{u_j}) + \dots + (1-t_j)^s D_s^{u'_j}(\tilde{\phi}_{u_j}) \right] \\ &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) u_j *_L \mathcal{D}(\tilde{\phi}_{u'_j}) + \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) u'_j *_L \mathcal{D}(\tilde{\phi}_{u_j}) \\ &= u_j *_L \mathcal{D} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \tilde{\phi}_{u'_j} + u'_j *_L \mathcal{D} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \tilde{\phi}_{u_j} \\ &= u_j *_L \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}}(u_1, \dots, u'_j, \dots, u_k) + u'_j *_L \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_k), \end{aligned}$$

also  $\tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} \in \text{DiffOp}_k^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  nach Proposition 4.1.2 v.) gilt. Hierbei durften wir  $\mathcal{D}$

wegen seiner  $\mathbb{K}$ -Linearität mit den Integralen vertauschen. Sei nun  $s - \sum_{i=1}^p l_i = q$

und die Aussage für  $q - 1$  korrekt. Dann ist:

$$\left( \prod_j^{a_{q+2}} \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} \right)(u_1, \dots, u_k) = a_{q+2} *_L \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}}(u_1, \dots, u_k) - \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}}(u_1, \dots, a_{q+2} \vee u_j, \dots, u_k).$$

Der zweite Summand ergibt ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} & \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}}(u_1, \dots, a_{q+2} \vee u_j, \dots, u_k) \\ &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \mathcal{D} \left[ a_{q+2} *_L \tilde{\phi}_{u_j} + (1-t_j) D_1^{a_{q+2}}(\tilde{\phi}_{u_j}) + \dots + (1-t_j)^s D_s^{a_{q+2}}(\tilde{\phi}_{u_j}) \right] \\ & \quad + \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k p(t) \mathcal{D} \left[ u_j *_L \tilde{\phi}_{a_{q+2}} + (1-t_j) D_1^{u_j}(\tilde{\phi}_{a_{q+2}}) + \dots + (1-t_j)^s D_s^{u_j}(\tilde{\phi}_{a_{q+2}}) \right] \\ &= a_{q+2} *_L \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} + \mathcal{D} D_1^{a_{q+2}} \int p(t) (1-t_j) \tilde{\phi}_{u_j} + \dots + \mathcal{D} D_q^{a_{q+2}} \int p(t) (1-t_j)^q \tilde{\phi}_{u_j} \\ & \quad + u_j *_L \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} + \mathcal{D} D_1^{u_j} \int p(t) (1-t_j) \tilde{\phi}_{a_{q+2}} + \dots + \mathcal{D} D_q^{u_j} \int p(t) (1-t_j)^q \tilde{\phi}_{a_{q+2}}, \end{aligned}$$

so dass insgesamt:

$$\begin{aligned}
 & \left( \prod_j^{a_{q+2}} \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} \right) (u_1, \dots, u_k) \\
 &= \underbrace{-\mathcal{D}D_1^{a_{q+2}} \int \overbrace{p(t)(1-t_j)}^{p'(t)} \tilde{\phi}_{u_j}}_{\text{DiffOp}_k^q(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})} - \dots - \underbrace{\mathcal{D}D_q^{a_{q+2}} \int p(t)(1-t_j)^q \tilde{\phi}_{u_j}}_{\text{DiffOp}_k^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})} \\
 & \quad - u_j *_L \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} - \mathcal{D}D_1^{u_j} \int p(t)(1-t_j) \tilde{\phi}_{a_{q+2}} - \dots - \mathcal{D}D_q^{u_j} \int p(t)(1-t_j)^q \tilde{\phi}_{a_{q+2}}.
 \end{aligned}$$

Die Summanden in der ersten Reihe sind nach Induktionsannahme Differentialoperatoren der Ordnung  $L = q, \dots, 1$ , verschwinden also nach Anwendung von  $\prod_j^{a_1, \dots, a_{q+1}}$ . Das gleiche gilt für die Terme in der zweiten Reihe, denn mit der  $*_L$ -Linearität der  $D_l$  in  $\mathcal{M}$  folgt:

$$a *_L \mathcal{D}D_l(u, m) - \mathcal{D}D_l(a *_L u, m) = \mathcal{D}[a *_L D_l(u, m) - D_l(a *_L u, m)].$$

Insgesamt ist somit  $\prod_j^{a_1, \dots, a_{q+2}} \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} = 0$  für alle  $1 \leq j \leq s$ , und Proposition 4.1.2 ii.) zeigt dann, dass  $\tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} \in \text{DiffOp}_k^{q+1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  gilt.

Um die letzte Behauptung einzusehen erinnern wir daran, dass

$$(\xi^k \phi)(u_1, \dots, u_k) = (\tilde{\phi} \circ G_k)(1 \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes 1)$$

mit  $\tilde{\phi} = ((\Upsilon^k)^{-1} \circ (\Theta^k)^{-1})(\phi)$  gilt.

Hieraus wird durch Anwendung von  $\prod_j^{a_{s+2}}$ :

$$\begin{aligned}
 & \left( \prod_j^{a_{s+2}} \xi^k \phi \right) (u_1, \dots, u_k) = \underbrace{-D_1^{a_{s+2}} \int (1-t_j) \tilde{\phi}_{u_j}}_{\text{DiffOp}_k^s(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})} - \dots - \underbrace{D_s^{a_{s+2}} \int (1-t_j)^s \tilde{\phi}_{u_j}}_{\text{DiffOp}_k^1(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})} \\
 & \quad - u_j *_L \tau_{\mathcal{D}}^{\tilde{\phi}} - D_1^{u_j} \int (1-t_j) \tilde{\phi}_{a_{s+2}} - \dots - D_s^{u_j} \int (1-t_j)^s \tilde{\phi}_{a_{s+2}}.
 \end{aligned}$$

Aus dem bisher Gezeigten folgt nun unmittelbar  $\prod_j^{a_1, \dots, a_{s+2}} (\xi^k \phi) = 0$  für alle  $1 \leq j \leq k$ , also  $\xi^k(\phi) \in \text{DiffOp}_k^{s+1}(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ , wie behauptet.

iii.) Sei  $\phi \in \text{DiffOp}_k^\bullet(S^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Dann ist:

$$\begin{aligned}
 (\delta^k \phi)(a_1, \dots, a_{k+1}) &= a_1 *_L \phi(a_2, \dots, a_{k+1}) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \phi(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{k+1}) \\
 & \quad + (-1)^{k+1} \phi(a_1, \dots, a_k) *_R a_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Die differentielle Natur der ersten beiden Summanden hatten wir bereits eingesehen und der letzte ergibt ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \phi(a_1, \dots, a_k) *_{\mathcal{R}} a_{k+1} &= a_{k+1} *_{\mathcal{L}} \phi(a_1, \dots, a_k) + D_1(a_{k+1}, \phi(a_1, \dots, a_k)) + \dots \\ &\quad + D_s(a_{k+1}, \phi(a_1, \dots, a_k)). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Proposition 4.1.2 ii.), d.) und mit:

$$\llbracket_j^a D_l(a_{k+1}, \phi(a_1, \dots, a_k)) = D_l(a_{k+1}, \llbracket_j^a \phi(a_1, \dots, a_k)) \quad \forall j \neq k+1,$$

da hiermit  $\delta^k: \text{DiffOp}_k^\bullet(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}) \longrightarrow \text{DiffOp}_k^\bullet(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  gilt. Der lokalkonvexe Fall folgt analog. ■

Mit Lemma 4.2.5 erhalten wir abschließend folgendes Resultat:

**Satz 4.2.6**

- i.) Sei  $\mathcal{M}$  ein differentieller  $\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}) - \mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann besitzt jede Kohomologieklassse  $[\eta] \in HH^k(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  mindestens einen Repräsentanten  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{s+1}(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Des Weiteren induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  Kettenabbildungen zwischen  $(HC_{\text{diff}}(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{\text{diff}})$  und  $(KC(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Hierbei ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\tilde{\hat{\xi}}^k$  surjektiv.
- ii.) Sei  $\mathcal{M}$  ein differentieller, lokalkonvexer  $\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}) - \mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V})$ -Bimodul. Dann besitzt jede Kohomologieklassse  $[\eta] \in HH_{\text{cont}}^k(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$  mindestens einen differentiellen Repräsentanten  $\phi \in \text{DiffOp}_k^{s+1, \text{cont}}(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M})$ . Des Weiteren induzieren  $\xi$  und  $\hat{\xi}$  wohldefinierte Kettenabbildungen zwischen  $(HC_{\text{c,d}}(\mathcal{S}^\bullet(\mathbb{V}), \mathcal{M}), \delta_{\text{c,d}})$  und  $(KC^{\text{cont}}(\mathbb{V}, \mathcal{M}), \Delta)$ . Hierbei ist  $\tilde{\xi}^k$  injektiv und  $\tilde{\hat{\xi}}^k$  surjektiv.



# A. Algebraische Grundlagen

## A.1. Ringe, Moduln und Kategorien

Dieser Abschnitt soll die algebraischen Grundbegriffe und Konventionen bereitstellen, die wir im Haupttext benötigen werden.

### Definition A.1.1 (Gruppe)

Eine Gruppe ist eine Menge  $G$ , versehen mit einer Abbildung  $\circ: G \times G \longrightarrow G$  derart, dass:

$$i.) \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G.$$

ii.) Es existiert ein eindeutig bestimmtes neutrales Element  $e \in G$ , so dass  $a \circ e = e \circ a = a$  für alle  $a \in G$ .

iii.) Zu jedem  $a \in G$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $a^{-1} \in G$  derart, dass  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ .

Eine Gruppe heißt abelsch oder kommutativ, falls  $a \circ b = b \circ a$  für alle  $a, b \in G$ . Man schreibt dann oft auch  $+$  anstelle  $\circ$ .

### Bemerkung A.1.2

Um obige Definition zu erhalten, reicht es in der Tat bereits aus, zusätzlich zu i.) entweder zu fordern, dass:

$$ii'.) \quad \exists e \in G \text{ mit } a \circ e = a \quad \forall a \in G,$$

$$iii'.) \quad \text{zu } a \in G, \exists a^{-1} \in G \text{ mit } a^{-1} \circ a = e$$

oder

$$ii'').) \quad \exists e \in G \text{ mit } e \circ a = a \quad \forall a \in G,$$

$$iii'').) \quad \text{zu } a \in G, \exists a^{-1} \in G \text{ mit } a \circ a^{-1} = e.$$

### Definition A.1.3

Eine Abbildung  $\phi: G \longrightarrow H$ , zwischen Gruppen  $(G, \circ_G)$  und  $(H, \circ_H)$ , heißt Gruppen-Homomorphismus oder einfach Homomorphismus, falls

$$\phi(f \circ_G g) = \phi(f) \circ_H \phi(g) \quad \forall f, g \in G.$$

**Definition A.1.4 (Ring)**

Ein Ring ist eine Menge  $R$ , versehen mit zwei Abbildungen  $+: R \times R \longrightarrow R$  und  $\cdot: R \times R \longrightarrow R$  derart, dass  $(R, +)$  eine abelsche Gruppe ist und  $\cdot$  das Assoziativgesetz erfüllt. Zudem gelten folgende Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in R. \end{aligned}$$

Das neutrale Element  $0_R$  von  $(R, +)$  heißt Nullelement von  $R$ . Ein Ring heißt unitär, falls er ein Einselement  $1_R$  bezüglich  $\cdot$  mit

$$1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a \quad \forall a \in R$$

besitzt. Dieses ist, vermöge  $1_R = 1_R \cdot \hat{1}_R = \hat{1}_R$ , bereits eindeutig bestimmt.

**Definition A.1.5 (Modul)**

Sei  $R$  ein Ring.

i.) Ein  $R$ -Linksmodul ist eine abelsche Gruppe  $(\mathcal{M}, +)$ , versehen mit einer Abbildung  $\cdot: R \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$  derart, dass für alle  $r, s \in R$  und alle  $x, y \in \mathcal{M}$ :

- a)  $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- b)  $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- c)  $(r \cdot s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$  also  $\cdot(r \cdot s, x) = \cdot(r, \cdot(s, x))$

gilt.

ii.) Ein  $R$ -Rechtsmodul ist eine abelsche Gruppe  $(\mathcal{M}, +)$ , versehen mit einer Abbildung  $\cdot: \mathcal{M} \times R \longrightarrow \mathcal{M}$  derart, dass für alle  $r, s \in R$  und alle  $x, y \in \mathcal{M}$ :

- a)  $(x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r$
- b)  $x \cdot (r + s) = x \cdot r + x \cdot s$
- c)  $x \cdot (r \cdot s) = (x \cdot r) \cdot s$  also  $\cdot(x, r \cdot s) = \cdot(\cdot(x, r), s)$

gilt.

iii.) Ist  $R$  kommutativ, so ist jeder  $R$ -Linksmodul, vermöge  $m \cdot_R r = r \cdot_L m$ , ebenfalls ein  $R$ -Rechtsmodul, denn es gilt:

$$(m \cdot_R r) \cdot_R s = (r \cdot_L m) \cdot_R s = s \cdot_L (r \cdot_L m) = (s \cdot r) \cdot_L m = (r \cdot s) \cdot_L m = m \cdot_R (r \cdot s).$$

Ebenso ist in dieser Situation jeder Rechtsmodul, vermöge  $r \cdot_L m = m \cdot_R r$ , ein Linksmodul. Daher ist es für derartige Ringe legitim, jeden  $R$ -Modul als Linksmodul zu behandeln.

iv.) Gegeben Ringe  $R_1$  und  $R_2$ , so ist ein  $R_1 - R_2$ -Bimodul  $\mathcal{M}$  ein  $R_1$ -Linksmodul, der gleichzeitig ein  $R_2$ -Rechtsmodul ist und der folgende zusätzliche Bedingung erfüllt:

$$(r_1 \cdot_L m) \cdot_R r_2 = r_1 \cdot_L (m \cdot_R r_2) \quad \forall r_1 \in R_1, r_2 \in R_2.$$



Hierbei bezeichnen  $\cdot_{L/R}$  die Links- bzw. Rechtsmodul-Multiplikation.

Ein  $R - R$ -Bimodul heißt symmetrisch, falls  $r *_L m = m *_R r$  für alle  $r \in R$  und alle  $m \in \mathcal{M}$ .

- v.) Sei  $R$  unitär, so wollen wir im Folgenden immer die  $R$ -Verträglichkeit von  $\mathcal{M}$  voraussetzen. Dies bedeutet, dass  $1_R \cdot_L m = m$  bzw.  $m \cdot_R 1_R = m$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  gilt. Für einen  $R_1 - R_2$ -Bimodul soll dies dann für beide Modulstrukturen erfüllt sein.

### Bemerkung A.1.6

- i.) Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, also insbesondere ein kommutativer Ring, so ist ein  $\mathbb{K}$ -Modul  $\mathbb{V}$  gerade ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dabei kommt es wegen iii.) nicht darauf an, ob  $\mathbb{V}$  Links- oder Rechtsmodul ist.
- ii.) Ist klar, um welchen Ring und welchen Modul es sich handelt, so schreibt man oft auch einfach  $rs$  für  $r *_L s$  und  $rm$  anstelle  $r \cdot_L m$ . Für Bimoduln schreibt man oft auch einfach nur  $r_1 m r_2$  und unterdrücken die Klammerung. Will man nicht weiter spezifizieren, ob von einem  $R$ -Links- / oder einem  $R$ -Rechtsmodul die Rede ist, spricht man schlicht von einem  $R$ -Modul.
- iii.) Für einen  $R$ -Linksmodul  $\mathcal{M}$  gilt:

$$((r *_L s) *_L t) *_L m = (r *_L s) *_L (t *_L m) = r *_L (s *_L (t *_L m)) = ((r *_L s) *_L t) *_L m$$

und für einen  $R$ -Rechtsmodul:  $m *_R ((r *_L s) *_L t) = m *_R (r *_L (s *_L t))$ . In beiden Fällen liefert dies eine kosmetische Begründung dafür, dass man Moduln gerade über Ringen definiert, in welchen die Assoziativität von  $*$  Definitionsgemäß gegeben ist.

### Definition A.1.7

Eine Abbildung  $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  zwischen  $R$ -Moduln heißt  $R$ -Homomorphismus oder einfach nur Homomorphismus, falls  $\phi(rx + sy) = r\phi(x) + s\phi(y)$  für alle  $r, s \in R$  und  $x, y \in \mathcal{M}$ . Einen surjektiven  $R$ -Homomorphismus bezeichnet man als Epimorphismus. Ein injektiver  $R$ -Homomorphismus heißt Monomorphismus. Die Menge aller  $R$ -Homomorphismen von  $\mathcal{M}$  nach  $\mathcal{N}$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

### Definition A.1.8

- i.) Eine Algebra über einem Ring  $R$  ist ein  $R$ -Modul  $\mathcal{A}$ , versehen mit einer  $R$ -bilinearen Verknüpfung:  $*$ :  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . Es gilt also für alle  $r \in R$  und alle  $a, b, c \in \mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} r(a *_L b) &= (ra) *_L b = a *_L (rb), \\ c *_L (a + b) &= c *_L a + c *_L b, \\ (a + b) *_L c &= a *_L c + b *_L c. \end{aligned}$$

Motiviert durch  $(rs)(a *_L b) = (ra) *_L (sb) = (sr)(a *_L b)$ , betrachtet man oft auch nur Algebren über kommutativen Ringen. In diesem Rahmen sind  $\mathbb{K}$ -Algebren gerade  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit Algebrenmultiplikation.

- ii.)  $\mathcal{A}$  heißt unitär, falls ein Element  $e \in \mathcal{A}$  derart existiert, dass  $e * a = a * e = a$  für alle  $a \in \mathcal{A}$ . Dieses ist dann wieder eindeutig bestimmt.

**Korollar A.1.9**

Jede assoziative  $R$ -Algebra  $\mathcal{A}$  definiert einen Ring.

**Definition A.1.10**

Gegeben eine assoziative  $R$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und ein  $\mathcal{A}$ -Modul  $(\mathcal{M}, *)$ , der selbst ein  $R$ -Modul ist. Dann setzen wir im Folgenden immer die  $R$ -Bilinearität von  $*$  voraus. Ist  $(\mathcal{M}, *_L, *_R)$  ein  $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ -Bimodul, fordern wir sowohl die  $R$ -Bilinearität von  $*_L$  als auch die von  $*_R$ .

**Definition A.1.11 (projektiver Modul)**

Ein  $R$ -Modul  $P$  heißt projektiv, falls für jeden Homomorphismus  $f \in \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  und jeden Epimorphismus  $h \in \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  mit  $R$ -Moduln  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$ , ein  $f' \in \text{Hom}_R(P, \mathcal{M})$  derart existiert, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ f' \downarrow & \searrow f & \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{h} & \mathcal{N}. \end{array}$$

**Definition A.1.12**

Gegeben ein  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$ . Dann ist eine Basis von  $\mathcal{M}$  eine Teilmenge  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{M}$  derart, dass jedes  $m \in \mathcal{M}$  eine eindeutige, endliche Darstellung  $m = \sum_{i=1}^n r_i e_{\alpha_i}$  mit Koeffizienten  $r_i \in R$  besitzt.

**Lemma A.1.13**

Jeder  $R$ -Modul  $P$  mit Basis ist projektiv.

BEWEIS: Gegeben  $R$ -Moduln  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ,  $f \in \text{Hom}_R(P, \mathcal{N})$  und ein Epimorphismus  $h \in \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . Wir wählen dann eine Basis  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  von  $P$  und setzen  $f_\alpha = f(e_\alpha)$ . Weiterhin wählen wir  $m_\alpha \in h^{-1}(f_\alpha)$ , was wegen der Surjektivität von  $h$  ohne weiteres möglich ist. Für  $p \in P$  mit  $p = \sum_{i=1}^n r_i e_{\alpha_i}$  definieren wir  $f'(p) = \sum_{i=1}^n r_i m_{\alpha_i}$ . Aus der Eindeutigkeit der Basisdarstellung jedes  $p \in P$  folgen sowohl Wohldefiniertheit, als auch  $R$ -Linearität von  $f'$ , und per Konstruktion ist klar, dass  $h \circ f' = f$ . ■

**Definition A.1.14**

Ein  $R$ -Modul heißt frei, falls er isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von  $R$  ist.

**Bemerkung A.1.15 (Direkte Summe, Kartesisches Produkt)**

- i.) Gegeben eine durch eine Indexmenge  $I$  indizierte Sammlung von Mengen  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , so ist deren kartesisches Produkt  $\prod_{\alpha \in I} T_\alpha$  definiert, als die Menge aller  $|I|$ -Tupel mit Einträgen in den  $T_\alpha$ . Dies ist so zu verstehen, dass jedes Element aus  $\prod_{\alpha \in I} T_\alpha$

einer Abbildungsvorschrift entspricht, die jedem  $\alpha \in I$  genau ein  $t_\alpha \in T_\alpha$  zuordnet. Im Falle  $I = \mathbb{N}$  entsprechen die Elemente in  $\prod_{k=1}^{\infty} T_n$  gerade den  $|\mathbb{N}|$ -Tupeln  $(t_0, t_1, t_2, \dots)$  mit  $t_k \in T_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

- ii.) Sind alle  $T_\alpha$  Mengen mit Null-Elementen  $0_\alpha \in T_\alpha$ , wie dies beispielsweise für Gruppen, Moduln oder Vektorräume der Fall ist, so definieren wir die direkte Summe  $\bigoplus_{\alpha \in I} T_\alpha$  als die Teilmenge aller  $|I|$ -Tupel aus  $\prod_{\alpha \in I} T_\alpha$ , bei denen nur für endlich viele  $t_\alpha \neq 0_\alpha$  gilt. Sind alle  $T_\alpha$  Gruppen, so wird die direkte Summe, wie auch deren kartesisches Produkt, vermöge komponentenweiser Addition

$$[\alpha \rightarrow t_\alpha] + [\alpha \rightarrow t'_\alpha] = [\alpha \rightarrow t_\alpha + t'_\alpha],$$

ebenfalls zu einer Gruppe. Sind alle  $T_\alpha$   $R$ -Linksmoduln, so wird  $\bigoplus_{\alpha \in I} T_\alpha$  durch

$$r *_L [\alpha \rightarrow t_\alpha] = [\alpha \rightarrow r *_L t_\alpha]$$

zu einem  $R$ -Linksmodul. Dies folgt analog für Rechtsmoduln. Für obige Definition beachte man, dass jeder Ring sowohl Links-, als auch Rechtsmodul über sich selbst ist. Sind alle  $T_\alpha = T$  so schreiben wir auch  $T^{|I|}$ , anstelle  $\bigoplus_{\alpha \in I} T_\alpha$ . Für eine endlichen Menge  $\{t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_n}\}$  mit  $t_{\alpha_i} \in T_{\alpha_i}$  sei dann:

$$\bigoplus_{\alpha \in I} T_\alpha \ni \bigoplus_{i=1}^n t_{\alpha_i} = \begin{cases} \alpha_i \rightarrow t_{\alpha_i} \\ \beta \rightarrow 0_\beta \text{ falls } \beta \neq \alpha_i \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Im Falle, dass  $T_\alpha = T$  für alle  $\alpha \in I$ , definieren wir für  $t \in T$ :

$$\bigoplus_{\alpha} t = \begin{cases} \alpha \rightarrow t_\alpha \\ \beta \rightarrow 0_\beta \text{ falls } \beta \neq \alpha_i. \end{cases}$$

Oft benutzen wir für die Darstellung von Elementen auch das Symbol  $\sum$  anstelle von  $\bigoplus$ .

### Lemma A.1.16

Gegeben ein  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$ , dann gilt:

- i.) Besitzt  $\mathcal{M}$  eine Basis, dann ist  $\mathcal{M}$  frei.  
ii.) Ist  $\mathcal{M}$  frei und  $R$  unitär, dann besitzt  $\mathcal{M}$  eine Basis.

BEWEIS: i.) Wir wählen eine Basis  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \alpha}$  und definieren  $\phi: \sum_{i=1}^n r_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \mapsto \bigoplus_{i=1}^n r_{\alpha_i}$ .

Wegen der Eindeutigkeit der Basiszerlegung ist  $\phi$  wohldefiniert und injektiv. Die Surjektivität und Linearität ist klar.

- ii.)  $\mathcal{M}$  ist frei und somit isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von  $R$ . Sei  $\phi$  dieser Isomorphismus. Dann ist  $\phi(m) = \bigoplus_{i=1}^n r_{\alpha_i}$ , und es folgt:

$$m = \phi^{-1}(\phi(m)) = \phi^{-1}\left(\bigoplus_{i=1}^n r_{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^n r_{\alpha_i} \underbrace{\phi^{-1}\left(\bigoplus_{\alpha_i} 1_{\alpha_i}\right)}_{e_{\alpha_i}} = \sum_{i=1}^n r_{\alpha_i} e_{\alpha_i}.$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt die Unitarität von  $R$  benutzt. Folglich hat jedes  $m \in \mathcal{M}$  eine eindeutige Darstellung als endliche Linearkombination der  $e_\alpha \in \mathcal{M}$ , was die Behauptung zeigt. ■

**Korollar A.1.17**

*Freie Moduln über unitären Ringen sind projektiv.*

**Definition A.1.18 (Klasse)**

Unter einer Klasse wollen wir im Folgenden eine Sammlung von Objekten verstehen, die eine bestimmte Eigenschaft gemein haben. Insbesondere ist dann jede Menge eine Klasse, da ihre Elemente die Eigenschaft gemein haben, Elemente dieser Menge zu sein. Die umgekehrte Inklusion gilt nicht. Betrachten wir nämlich die durchaus vernünftige Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, so folgt unmittelbar, dass diese per Definition keine Menge sein kann. Wäre sie nämlich eine Menge, so enthielte sie sich entweder, oder eben nicht. Beide Annahmen widersprechen sich selbst. Für eine ausführliche Diskussion des Mengenbegriffes siehe beispielsweise [Dei09].

**Definition A.1.19 (Kategorie)**

Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein Konstrukt, bestehend aus folgenden Daten:

- i.) Einer Klasse  $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$  von Objekten.
- ii.) Je einer Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  von Morphismen zu jedem Paar  $(X, Y)$  von Objekten. Es gilt dabei die Disjunktheit von  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  und  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ , falls  $X \neq X'$  oder  $Y \neq Y'$ . Für  $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  bezeichnen  $\text{dom}(\phi) = X$  die Quelle und  $\text{cod}(\phi) = Y$  das Ziel des Morphismus.
- iii.) Einer assoziativen Abbildung  $\circ: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$  für alle  $X, Y, Z \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ .

Des Weiteren existiert zu jedem  $X \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$  ein Element  $\text{id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$  mit  $f \circ \text{id}_X = f$ , falls  $\text{cod}(f) = X$  und  $\text{id}_X \circ f = f$  für  $\text{dom}(f) = X$ .

**Beispiel A.1.20**

- i.) Jede Klasse von Mengen als Objekte, zusammen mit der Menge der Abbildungen zwischen diesen als Morphismen.
- ii.) Gegeben ein Ring  $R$ , dann bilden die  $R$ -Moduln zusammen mit den  $R$ -Homomorphismen die Kategorie  $R\text{-mod}$ .
- iii.) Die Kategorie  $\text{Ab}$  mit den abelschen Gruppen als Objekten und den Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

**Definition A.1.21 (Funktor ko-/kontravariant)**

Ein Funktor  $\mathcal{F}$  von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in eine Kategorie  $\mathcal{C}'$  ist eine strukturerhaltende Operation, bestehend aus folgenden Daten:

- i.) Einer Abbildung  $\mathcal{F}_{\text{Ob}}: \text{Ob}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \text{Ob}_{\mathcal{C}'}$ .
- ii.) Einer Abbildung  $\mathcal{F}_{\text{Mor}}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}_{\text{Ob}}(X), \mathcal{F}_{\text{Ob}}(Y))$ .

Diese erfüllen folgende Kompatibilitätsbedingungen:

- i.)  $\mathcal{F}_{\text{Mor}}(f \circ g) = \mathcal{F}_{\text{Mor}}(f) \circ \mathcal{F}_{\text{Mor}}(g)$  kovarianter Funktor  
 $\mathcal{F}_{\text{Mor}}(f \circ g) = \mathcal{F}_{\text{Mor}}(g) \circ \mathcal{F}_{\text{Mor}}(f)$  kontravarianter Funktor
- ii.)  $\mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$

### Definition A.1.22 (Additivität)

- i.) Wir wollen im Folgenden eine Kategorie  $\mathcal{C}$  als additiv bezeichnen, falls für jedes Paar  $(X, Y)$  von Objekten von  $\mathcal{C}$  eine abelsche Gruppenstruktur  $(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y), +, 0_{X,Y})$  mit einer kommutativen Abbildung

$$+: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

und einem 0-Element  $0_{X,Y}$  derart existiert, dass für  $f, f_1, f_2 \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  und  $g, g_1, g_2 \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  mit  $Z \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$  folgende algebraische Identitäten erfüllt sind:

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f, \quad (\text{A.1})$$

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2. \quad (\text{A.2})$$

- ii.) Gegeben ein Funktor  $\mathcal{F}$  zwischen additiven Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}'$ , so heißt  $\mathcal{F}$  additiv falls:

$$\mathcal{F}_{\text{Mor}}(f + g) = \mathcal{F}_{\text{Mor}}(f) + \mathcal{F}_{\text{Mor}}(g) \quad \forall f, g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

wenn  $\mathcal{F}$  also verträglich ist mit den abelschen Gruppenstrukturen auf  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}'$ .

### Beispiel A.1.23

Die Kategorie  $R\text{-mod}$  ist additiv vermöge

$$(\phi + \psi)(m) = \phi(m) + \psi(m) \quad \forall m \in \mathcal{M},$$

für  $\phi, \psi \in \text{Mor}_{R\text{-mod}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  mit  $R$ -Moduln  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ .

## A.2. Homologische Algebra

Ziel dieses Abschnittes ist die Bereitstellung der homologisch-algebraischen Begrifflichkeiten und Zusammenhänge, die dieser Arbeit als Ausgangspunkt dienen sollen. Er enthält hauptsächlich Resultate aus [Jac89, Kapitel 6].

### A.2.1. Komplexe und Homologien

Aufbauend auf A.1 beginnen wir mit folgenden elementaren Definitionen:

#### Definition A.2.1 (Komplex)

Gegeben ein Ring  $R$ .

- i.) Ein  $R$ -Komplex ist eine Menge  $\{C_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  von Paaren  $(C_i, d_i)$ , von  $R$ -Moduln  $C_i$  und  $R$ -Homomorphismen  $d_i: C_i \rightarrow C_{i-1}$  derart, dass  $d_{i-1} \circ d_i = 0$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .
- ii.) Ein  $R$ -Kettenkomplex ist ein  $R$ -Komplex mit  $C_i = \{0\} \forall i < 0$  und  $d_i = 0 \forall i \leq 0$ .
- iii.) Ein  $R$ -Kokettenkomplex ist ein  $R$ -Komplex, für den  $C_i = \{0\}$ ,  $d_i = 0$  und  $\forall i > 0$ . Man setzt dann  $(C^i, d^i) := (C_{-i}, d_{-i})$ , womit  $d^i: C^i \rightarrow C^{i+1}$ .
- iv.) Gegeben zwei  $R$ -Komplexe  $(C, d)$  und  $(C', d')$ , so heißt eine Menge  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  von  $R$ -Homomorphismen  $\alpha_i: C_i \rightarrow C'_i$  Kettenabbildung von  $(C, d)$  nach  $(C', d')$ , falls folgendes Diagramm für alle  $i \in \mathbb{Z}$  kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha_{i-1} \\ C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} \end{array}$$

#### Bemerkung A.2.2

- i.) Gegeben ein Ring  $R$ , so bilden die  $R$ -Komplexe zusammen mit den Kettenabbildungen die Kategorie  $R\text{-comp}$ .
- ii.) Aus der Additivität von  $R\text{-mod}$  erhalten wir die von  $R\text{-comp}$  vermöge

$$(\alpha + \beta)_i := \alpha_i + \beta_i$$

für Kettenabbildungen  $\alpha, \beta: (C, d) \rightarrow (C', d')$ . In der Tat liefert diese Definition mit

$$(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1})d_i = \alpha_{i-1}d_i + \beta_{i-1}d_i = d'_i\alpha_i + d'_i\beta_i = d'_i(\alpha_i + \beta_i)$$

wieder eine Kettenabbildung zwischen besagten Komplexen. Diese Addition ist zudem kommutativ, und es ist klar, dass auch die Distributivgesetze (A.1) und (A.2) erfüllt sind.

#### Definition A.2.3 (Ko-/Homologiemodul)

- i.) Gegeben ein  $R$ -Kettenkomplex  $(C, d)$ . Sei  $Z_i = \ker(d_i) \subseteq C_i$ ,  $B_i = \text{im}(d_{i+1}) \subseteq C_i$ , dann sind sowohl  $Z_i$ , als auch  $B_i$  Untermoduln von  $C_i$ . Mit  $d_i \circ d_{i+1} = 0$  gilt zudem  $B_i \subseteq Z_i$ , womit  $B_i$  sogar ein Untermodul von  $Z_i$  ist. Wir betrachten den Quotienten  $H_i = Z_i/B_i$ , womit genau dann  $\alpha \in [z_i] \subseteq Z_i$  ist, wenn  $\alpha = z_i + b_i$  für ein  $b_i \in B_i$  gilt. Die Elemente in  $Z_i$  nennt man  $i$ -Zykeln oder geschlossen, die

Elemente aus  $B_i$   $i$ -Ränder oder exakt. Die Elemente  $[\eta_i] \in H_i$  heißen  $i$ -te Homologieklassen und  $H_i$  selbst  $i$ -ter Homologiemodul. Dabei sind Modul-Addition und Modul-Multiplikation durch  $[\eta_i] + [\mu_i] = [\eta_i + \mu_i]$  sowie  $r[\eta_i] := [r\eta_i]$  auf Repräsentanten-Niveau definiert. Die Wohldefiniertheit dieser Operationen folgt dabei unmittelbar aus der Untermoduleigenschaft von  $B_i \subseteq Z_i$ . Man setzt dann  $H_0 = C_0 / \text{im}(d_1)$ .

ii.) Für einen  $R$ -Kokettenkomplex definieren wir analog  $Z^i = \ker(d^i)$ ,  $B^i = \text{im}(d^{i-1})$  und  $H^i = Z^i / B^i$ . Die Elemente  $[\eta_i] \in H^i$  heißen  $i$ -te Kohomologieklassen und  $H^i$  selbst  $i$ -ter Kohomologiemodul mit der Konvention  $H^0 = \ker(d^0)$ .

iii.) Sprechen wir ganz allgemein von einem  $R$ -Komplex, so benutzen wir die Nomenklatur aus i.).

#### Definition A.2.4

Ein  $R$ -Komplex  $(C, d)$  heißt exakt, falls  $\ker(d_i) = \text{im}(d_{i+1})$ , und nach Definition A.2.3 ist dies gleichbedeutend mit  $H_i = \{0\} \forall i \in \mathbb{Z}$ .

Wir wollen nun aufzeigen, inwiefern uns eine Kettenabbildung  $\alpha$  zwischen zwei  $R$ -Komplexen  $(C, d)$  und  $(C', d')$ , Abbildungen zwischen deren Homologiemoduln  $H_i$  und  $H'_i$ , und sogar Funktoren von  $R\text{-comp}$  nach  $R\text{-mod}$  definiert.

#### Lemma A.2.5

Gegeben zwei  $R$ -Komplexe  $(C, d)$  und  $(C', d')$  und eine Kettenabbildung  $\alpha$  von  $(C, d)$  nach  $(C', d')$ , dann gilt:

i.) Es ist  $\alpha_i(Z_i) \subseteq Z'_i$  und  $\alpha_i(B_i) \subseteq B'_i$ .

ii.) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i: H_i &\longrightarrow H'_i \\ [z_i] &\longmapsto [\alpha_i(z_i)] \end{aligned}$$

sind  $R$ -Homomorphismen. Ist  $\alpha_i$  ein Isomorphismus, so auch  $\tilde{\alpha}_i$ .

iii.) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \sim_i^{Ob}: R\text{-Kompl.} &\longrightarrow R\text{-Moduln} \\ (C, d) &\longmapsto H_i(C) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sim_i^{Mor}: \text{Hom}_R(C, C') &\longrightarrow \text{Hom}_R(H_i(C), H_i(C')) \\ \alpha &\longmapsto \tilde{\alpha}_i \end{aligned}$$

definieren einen additiven, kovarianten Funktor  $\sim_i$  von  $R\text{-comp}$  nach  $R\text{-mod}$ . Den  $i$ -ten Homologie-Funktor.

BEWEIS: *i.)* Mit Definition A.2.1 *iv.)* erhalten wir:

$$(d'_i \circ \alpha_i)(z_i) = (\alpha_{i-1} \circ d_i)(z_i) = \alpha_{i-1}(0) = 0 \quad \forall z_i \in Z_i,$$

$$\alpha_i(b_i) = (\alpha_i \circ d_{i+1})(b_{i+1}) = d'_{i+1}(\alpha_{i+1} \circ b_{i+1}) \in B'_i \quad \text{für } b_{i+1} \in C_{i+1}, b_i \in B_i.$$

*ii.)* Die  $R$ -Linearität ist klar mit der von  $\alpha_i$  und der Definition der Modul-Multiplikation und Addition in  $H'_i$ . Für die Wohldefiniertheit sei  $z'_i \in [z_i]$  mit  $z_i \in Z$ . Dann ist zu zeigen, dass  $[\alpha_i(z'_i)] = [\alpha_i(z_i)]$ . Dies folgt mit

$$[\alpha_i(z'_i)] = [\alpha_i(z_i + b_i)] \stackrel{i.)}{=} [\alpha_i(z_i) + b'_i] = [\alpha_i(z_i)] + [b'_i] = [\alpha_i(z_i)].$$

Sind die  $\alpha_i$  Isomorphismen, so gilt  $\alpha_{i-1}^{-1} \circ d'_i = d_i \circ \alpha_i^{-1}$ , vermöge Definition A.2.1 *v.)*, womit auch die  $\alpha_i^{-1}$  Kettenabbildungen sind. Mit *i.)* folgt unmittelbar  $Z_i \stackrel{\alpha_i}{\cong} Z'_i$  und  $B_i \stackrel{\alpha_i}{\cong} B'_i$ , und für  $[z'_i] \in H'_i$  finden wir somit  $z_i \in Z_i$  mit  $\tilde{\alpha}_i([z_i]) = [\alpha_i(z_i)] = [z'_i]$ , was die Surjektivität von  $\tilde{\alpha}_i$  zeigt. Für die Injektivität nehmen wir an, es wäre  $\tilde{\alpha}_i([z_i]) = \tilde{\alpha}_i([z'_i])$  mit  $[z_i] \neq [z'_i]$ . Dann folgt  $\alpha_i(z_i) = \alpha_i(z'_i) + b'_i$  mit  $b'_i = \alpha_i(b_i)$  für ein  $b_i \in B_i$  und somit  $z_i - z'_i - b_i = 0$ . Im Widerspruch zu  $[z_i] \neq [z'_i]$ .

*iii.)* Zunächst ist klar, dass  $\widetilde{\text{id}_{C_i}} = \text{id}_{H_i}$ . Weiter haben wir zu zeigen, dass

$$\sim_i^{Mor} (\beta \circ \alpha) := (\widetilde{\beta \circ \alpha})_i \stackrel{!}{=} \tilde{\beta}_i \circ \tilde{\alpha}_i =: \sim_i^{Mor} (\beta) \circ \sim_i^{Mor} (\alpha)$$

für Kettenabbildungen  $\alpha: (C, d) \rightarrow (C', d')$  und  $\beta: (C', d') \rightarrow (C'', d'')$ . Sei hierfür  $[z_i] \in H_i$ , dann folgt

$$\begin{aligned} (\widetilde{\beta \circ \alpha})_i([z_i]) &= [(\beta_i \circ \alpha_i)(z_i)] = [\beta_i(\alpha_i(z_i))] \\ &= \tilde{\beta}_i([\alpha_i(z_i)]) = \tilde{\beta}_i(\tilde{\alpha}_i([z_i])) = (\tilde{\beta}_i \circ \tilde{\alpha}_i)([z_i]). \end{aligned}$$

Für die Additivität beachte man, dass sowohl  $R\text{-comp}$ , als auch  $R\text{-mod}$  additive Kategorien sind, und es ist zu zeigen, dass:

$$\sim_i^{Mor} (\alpha + \beta) = \sim_i^{Mor} (\alpha) + \sim_i^{Mor} (\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \text{Hom}_R(C, C').$$

Dies folgt sofort mit

$$(\widetilde{\alpha + \beta})_i([\eta_i]) = [(\alpha_i + \beta_i)(\eta_i)] = [\alpha_i(\eta_i)] + [\beta_i(\eta_i)] = \tilde{\alpha}_i([\eta_i]) + \tilde{\beta}_i([\eta_i]). \quad \blacksquare$$

## A.2.2. Homotopie

Ein Kriterium, das festlegt, ob zwei Kettenabbildungen  $\alpha, \beta: (C, d) \rightarrow (C', d')$  auf Homologie-Niveau die gleiche Abbildung induzieren, wird durch die sogenannte Homotopieeigenschaft bereitgestellt:



**Definition A.2.6 (Homotopie)**

Gegeben zwei Kettenabbildungen  $\alpha, \beta: (C, d) \rightarrow (C', d')$  von  $R$ -Komplexen  $(C, d)$  und  $(C', d')$ , so heißen  $\alpha$  und  $\beta$  homotop ( $\alpha \sim \beta$ ), falls  $R$ -Homomorphismen  $\{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  mit  $s_i: C_i \rightarrow C'_{i+1}$  derart existieren, dass

$$\alpha_i - \beta_i = d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C_{i-2} \xrightarrow{d_{i-2}} \cdots \\ & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i-1} & & \downarrow \alpha_{i-2} \\ \cdots & \xrightarrow{d'_{i+1}} & C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & C'_{i-2} \xrightarrow{d'_{i-2}} \cdots \end{array}$$

*(Note: In the original image, wavy arrows labeled  $s_i, s_{i-1}, s_{i-2}$  connect the horizontal maps  $\alpha_i, \alpha_{i-1}, \alpha_{i-2}$  to the vertical maps  $d'_{i+1}, d'_i, d'_{i-1}$  respectively.)*

**Warnung:** Die gewellten Pfeile sind hier und im Folgenden keine kommutativen Elemente des Diagramms.

**Bemerkung A.2.7**

i.) Für  $R$ -Kettenkomplexe gilt (A.3) mit der Zusatzbedingung  $s_i = 0$  für  $i < 0$ .

ii.) Für  $R$ -Kokettenkomplexe  $(C^i, d^i)$  übersetzt sich Definition A.2.6 zu

$$\alpha^i - \beta^i = d'^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.4})$$

mit  $R$ -Homomorphismen  $s^i: C^i \rightarrow C^{i-1}$  und  $s^i = 0$  für  $i \leq 0$ .

$$\begin{array}{ccccccc} C^0 & \xrightarrow{d^0} & C^1 & \xrightarrow{d^1} & C^2 & \xrightarrow{d^2} & C^3 \rightarrow \cdots \\ \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 \\ C'^0 & \xrightarrow{d'^0} & C'^1 & \xrightarrow{d'^1} & C'^2 & \xrightarrow{d'^2} & C'^3 \rightarrow \cdots \end{array}$$

*(Note: In the original image, wavy arrows labeled  $s^1, s^2, s^3$  connect the horizontal maps  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  to the vertical maps  $d'^0, d'^1, d'^2$  respectively.)*

**Korollar A.2.8**

Homotopie induziert eine Äquivalenzrelation.

**BEWEIS:** Die Symmetrie ist klar, ebenso die Reflexivität mit der Wahl  $s_i = 0$ . Für die Transitivität sei  $\alpha \sim \beta$  via  $s$  und  $\beta \sim \gamma$  via  $t$ , dann folgt  $\alpha_i - \beta_i = d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i$  sowie  $\beta_i - \gamma_i = d'_{i+1}t_i + t_{i-1}d_i$  und somit  $\alpha_i - \gamma_i = d'_{i+1}(s_i + t_i) + (s_{i-1} + t_{i-1})d_i$ . Dies zeigt  $\alpha \sim \gamma$  via  $u = s + t = \{s_i + t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . ■

**Lemma A.2.9**

Ist in der Situation von Definition A.2.6  $\alpha \sim \beta$ , so gilt  $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\beta}_i$ .

**BEWEIS:**

$$\tilde{\alpha}_i([z_i]) = [\alpha_i(z_i)] = [\beta_i(z_i)] + \underbrace{[(d'_{i+1}s_i)(z_i)] + [(s_{i-1}d_i)(z_i)]}_{[0]} = [\beta_i(z_i)] + [b'_i] = \tilde{\beta}_i([z_i])$$

für  $z_i \in Z_i$ ,  $B'_i \ni b'_i = (d'_{i+1}s_i)(z_i)$ . ■

### A.2.3. Auflösungen

#### Definition A.2.10

Gegeben ein  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$ , so bezeichnen wir mit einem Komplex  $(C, d, \epsilon)$  über  $\mathcal{M}$  einen  $R$ -Kettenkomplex  $(C, d)$  zusammen mit einem  $R$ -Epimorphismus  $\epsilon : C_0 \twoheadrightarrow \mathcal{M}$  derart, dass  $\epsilon \circ d_1 = 0$ . Solch ein  $\epsilon$  bezeichnet man auch als Augmentierung von  $(C, d)$ . Grafisch bedeutet dies:

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M},$$

wobei der letzte Pfeil die Surjektivität von  $\epsilon$  beutet. In obiger Kette von Homomorphismen ergibt somit die Hintereinanderausführung je zweier aufeinander folgender die 0-Abbildung.

#### Definition A.2.11

Gegeben ein Komplex  $(C, d, \epsilon)$  über einem  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$ .

- i.)  $(C, d, \epsilon)$  heißt *Auflösung*, falls die Kette von Homomorphismen aus obiger Definition exakt ist, also zusätzlich zu der Exaktheit von  $(C, d)$  auch  $\text{im}(d_1) = \ker(\epsilon)$  gilt. Das bedeutet  $H_i(C) = 0$  für  $i > 0$  und  $H_0 := C_0 / \text{im}(d_1) = C_0 / \ker(\epsilon) \cong \mathcal{M}$ .
- ii.)  $(C, d, \epsilon)$  heißt *projektiv*, falls alle  $C_i$  projektive  $R$ -Moduln sind.

#### Satz A.2.12

Gegeben ein projektiver Komplex  $(C, d, \epsilon)$  über einem  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$  und eine Auflösung  $(C', d', \epsilon')$  eines  $R$ -Moduls  $\mathcal{M}'$ . Sei weiter  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  ein  $R$ -Homomorphismus. Dann existiert eine Kettenabbildung  $\alpha : C \rightarrow C'$  derart, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C_{i-2} & \xrightarrow{d_{i-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & C_0 & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{M} \\ & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i-1} & & \downarrow \alpha_{i-2} & & & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \mu \\ \cdots & \xrightarrow{d'_{i+1}} & C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & C'_{i-2} & \xrightarrow{d'_{i-2}} & \cdots & \xrightarrow{d'_1} & C'_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & \mathcal{M}' \end{array}$$

Weiterhin sind alle derartigen Kettenabbildungen zueinander homotop.

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist  $\epsilon'$  surjektiv und  $C_0$  projektiv. Hermit finden wir ein  $\alpha_0 \in \text{Hom}_R(C_0, C'_0)$  derart, dass

$$\begin{array}{ccc} C_0 & & \\ \alpha_0 \downarrow & \searrow \mu \circ \epsilon & \\ C'_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & \mathcal{M}' \end{array}$$

kommutiert. Dies bildet den Induktionsanfang, und wir müssen dann lediglich, für  $\alpha_{i-1}$  vorgegeben, die Existenz eines  $\alpha_i$  nachweisen, welches die zugehörige Zelle zum kommutieren bringt. Hierzu wollen wir zunächst  $C'_{i-1}$  durch  $\text{im}(d'_i)$  ersetzen dürfen,

da dann  $d'_i$  surjektiv wäre, und mit der Projektivität von  $C_i$  folgte abermals die Existenz eines solchen  $\alpha_i$ . Dafür reicht es zu zeigen, dass  $\text{im}(\alpha_{i-1} d_i) \subseteq \text{im}(d'_i)$ . Nun folgt

$$d'_{i-1} \alpha_{i-1} d_i = \alpha_{i-2} d_{i-1} d_i = 0,$$

womit  $\text{im}(\alpha_{i-1} \circ d_i) \subseteq \ker(d'_{i-1}) = \text{im}(d'_i)$  mit der Exaktheit von  $(C', d', \epsilon')$ . Das zeigt die erste Aussage des Satzes.

Für die zweite seien  $\alpha, \beta$  so, dass sie obiges Diagramm zum kommutieren bringen. Wir wollen dann eine Homotopie  $s$  derart finden, dass:

$$\gamma_i = \alpha_i - \beta_i = d'_{i+1} s_i + s_{i-1} d_i. \quad (\text{A.5})$$

Zunächst folgt unmittelbar:

$$\epsilon' \gamma_0 = \epsilon' \alpha_0 - \epsilon' \beta_0 = \mu \epsilon - \mu \epsilon = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$d'_i \gamma_i = \gamma_{i-1} d_i \quad i \geq 1. \quad (\text{A.7})$$

Wir betrachten den Diagrammausschnitt:

$$\begin{array}{ccc} & C_0 & \\ & \downarrow \gamma_0 & \\ C'_1 & \xrightarrow{d'_1} & C'_0 \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{M}' \end{array}$$

und beachten, dass mit (A.6) und der Exaktheit von  $(C', d', \epsilon')$ :  $\text{im}(\gamma_0) \subseteq \ker(\epsilon') = \text{im}(d'_1)$  gilt, womit mittels der Projektivität von  $C_0$ :

$$\begin{array}{ccc} & C_0 & \\ s_0 \swarrow & \downarrow \gamma_0 & \\ C'_1 & \xrightarrow{d'_1} & \text{im}(d'_1). \end{array}$$

Durch  $\gamma_0 = d'_1 s_0$  mit  $i = 0$  und  $s_{-1} = 0$  ist die Homotopiebedingung (A.5) erfüllt. Sei nun wieder (A.5) für  $0 \leq i \leq n-1$  korrekt. Wir definieren dann die Hilfsabbildung  $\tilde{\gamma}_n: C_n \rightarrow C'_n$  induktiv durch  $\tilde{\gamma}_n := \gamma_n - s_{n-1} d_n$  und erhalten:

$$\begin{aligned} d'_n \tilde{\gamma}_n &= d'_n (\gamma_n - s_{n-1} d_n) = d'_n \gamma_n - d'_n s_{n-1} d_n \stackrel{(\text{A.7})}{=} \gamma_{n-1} d_n - d'_n s_{n-1} d_n \\ &= (\gamma_{n-1} - d'_n s_{n-1}) d_n \stackrel{(\text{A.5})}{=} (\gamma_{n-1} - \gamma_{n-1} + s_{n-2} d_{n-1}) d_n = 0. \end{aligned}$$

Es ist abermals  $\text{im}(\tilde{\gamma}_n) \subseteq \ker(d'_n) = \text{im}(d'_{n+1})$ , und mit der Projektivität von  $C_n$  erhalten wir ein  $s_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$  derart, dass  $d'_{n+1} s_n = \tilde{\gamma}_n = \gamma_n - s_{n-1} d_n$ :

$$\begin{array}{ccc} & C_n & \\ s_n \swarrow & \downarrow \tilde{\gamma}_n & \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & \text{im}(d'_{n+1}). \end{array}$$

Es folgt unmittelbar  $\gamma_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$  und somit (A.5). ■

### A.2.4. Rechtsinduzierte Funktoren

Zunächst wollen wir die in Abschnitt A.2.1 und A.2.2 behandelten Begrifflichkeiten und Zusammenhänge von  $R$ -Moduln auf abelsche Gruppen übertragen ( $R$ -Moduln waren ja lediglich derartige Gruppen mit Zusatzstruktur). Aus Definition A.2.1 wird:

#### Definition A.2.13

- i.) Ein Gruppenkomplex ist eine Menge  $\{G_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  von Paaren  $(G_i, d_i)$  von abelschen Gruppen  $G_i$  und Homomorphismen  $d_i: G_i \rightarrow G_{i-1}$  mit  $d_{i-1} \circ d_i = 0$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .
- ii.) Ein Gruppen-Kettenkomplex ist ein Gruppenkomplex, für den  $G_i = \{0\} \forall i < 0$  und  $d_i = 0 \forall i \leq 0$ .
- iii.) Ein Gruppen-Kokettenkomplex ist ein Gruppenkomplex, für den  $G_i = \{0\}$  und  $d_i = 0$  für alle  $i > 0$ . Man setzt  $(G^i, d^i) := (G_{-i}, d_{-i})$ , womit  $d^i: G^i \rightarrow G^{i+1}$ .
- iv.) Gegeben zwei Gruppenkomplexe  $(G, d)$  und  $(G', d')$ , so heißt eine Menge  $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  von Gruppenhomomorphismen  $\alpha_i: G_i \rightarrow G'_i$  Kettenabbildung von  $(G, d)$  nach  $(G', d')$ , falls folgendes Diagramm für alle  $i \in \mathbb{Z}$  kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{d_i} & G_{i-1} \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha_{i-1} \\ G'_i & \xrightarrow{d'_i} & G'_{i-1} \end{array}$$

Definition A.2.3 wird zu:

#### Definition A.2.14 (Ko-/Homologiegruppe)

- i.) Gegeben ein Gruppen-Kettenkomplex  $(G, d)$ . Sei  $Z_i = \ker(d_i) \subseteq G_i$  sowie  $B_i = \operatorname{im}(d_{i+1}) \subseteq G_i$ . Dann ist  $B_i \subseteq Z_i$  eine Untergruppe von  $Z_i$ . Wir betrachten wieder den Quotienten  $H_i = Z_i/B_i$  und nennen die  $[g_i] \in H_i$   $i$ -te Homologieklassen sowie  $H_i$  selbst  $i$ -te Homologiegruppe. Man setzt dann  $H_0 = G_0/\operatorname{im}(d_1)$ .
- ii.) Für einen Gruppen-Kokettenkomplex definieren wir  $Z^i = \ker(d_i)$ ,  $B^i = \operatorname{im}(d^{i-1})$  und  $H^i = Z^i/B^i$ . Die Elemente  $[g_i] \in H^i$  heißen  $i$ -te Kohomologieklassen und  $H^i$  selbst  $i$ -te Kohomologiegruppe mit der Konvention  $H^0 = \ker(d^0)$ .
- iii.) Sprechen wir von einem Gruppen-Komplex, so benutzen wir die Nomenklatur aus i.).

Definition A.2.4 und Lemma A.2.5 übertragen sich sinngemäß, ebenso der gesamte Abschnitt A.2.2. In Lemma A.2.5 iv.) haben wir dann additive, kovariante Funktoren  $\sim_i$

$$\begin{aligned} \sim_i^{Ob}: \text{Gruppenkompl.} &\longrightarrow \text{ab. Gr.} \\ (G, d) &\longmapsto H_i(G) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sim_i^{Mor}: \operatorname{Hom}(G, G') &\longrightarrow \operatorname{Hom}(H_i(G), H_i(G')) \\ \alpha &\longmapsto \tilde{\alpha}_i. \end{aligned}$$

Für einen  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$ , einen Komplex  $(C, d, \epsilon)$  über  $\mathcal{M}$  und einen kontravarianten, additiven Funktor  $\mathcal{F}: R\text{-mod} \rightarrow \text{Ab}$  erhalten wir durch Anwendung dieses Funktors auf  $(C, d, \epsilon)$  einen Gruppen-Kokettenkomplex  $(\mathcal{F}C, \mathcal{F}d, \mathcal{F}\epsilon)$ :

$$\mathcal{F}M \xrightarrow{\mathcal{F}\epsilon} \mathcal{F}C_0 \xrightarrow{\mathcal{F}d_1} \mathcal{F}C_1 \xrightarrow{\mathcal{F}d_2} \mathcal{F}C_2 \xrightarrow{\mathcal{F}d_3} \dots$$

In der Tat sind mit der Additivität von  $\mathcal{F}$  alle Pfeile Gruppenhomomorphismen. Des Weiteren gilt  $\mathcal{F}d_{i+1} \circ \mathcal{F}d_i = \mathcal{F}(d_i \circ d_{i+1}) = \mathcal{F}(0) = 0$ . Ist  $(C, d, \epsilon)$  exakt, so überträgt sich dies nicht notwendigerweise auf  $(\mathcal{F}C, \mathcal{F}d, \mathcal{F}\epsilon)$  und wir erhalten im Allgemeinen nicht-triviale Kohomologiegruppen  $H^i(\mathcal{F}C)$  sowie  $H^0(\mathcal{F}C) := \ker(\mathcal{F}d_1)$ .

### Lemma A.2.15

Gegeben  $R$ -Moduln  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ , ein projektiver Komplex  $(C, d, \epsilon)$  über  $\mathcal{M}$ , eine Auflöser  $(C', d', \epsilon')$  von  $\mathcal{M}'$  und ein additiver, kontravarianter Funktor  $\mathcal{F}: R\text{-mod} \rightarrow \text{Ab}$ . Sei des Weiteren  $\mu$  ein Homomorphismus  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ . Dann gilt:

i.) Es existieren nur von diesen Daten abhängige Gruppenhomomorphismen  $\widetilde{\mathcal{F}\alpha}_i: H^i(\mathcal{F}C') \rightarrow H^i(\mathcal{F}C)$ .

ii.) Sind  $(C, d, \epsilon)$  und  $(\overline{C}, \overline{d}, \overline{\epsilon})$  projektive Auflösungen des selben  $R$ -Moduls  $\mathcal{M}$ , so gilt  $H^i(\mathcal{F}C) \simeq H^i(\mathcal{F}\overline{C})$ .

BEWEIS: i.) Zunächst haben wir mit Satz A.2.12 eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Kettenabbildung  $\alpha: (C, d, \epsilon) \rightarrow (C', d', \epsilon')$  derart, dass

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_3} & C_2 & \xrightarrow{d_2} & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M} \\ & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_0 \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{d'_3} & C'_2 & \xrightarrow{d'_2} & C'_1 & \xrightarrow{d'_1} & C'_0 \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{M}' \\ & & & & & & \mu \downarrow \end{array}$$

kommutiert. Sei weiter  $\alpha \sim \beta$  vermöge  $s_i: C_i \rightarrow C'_{i+1}$ , dann erhalten wir durch Anwendung von  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}M' & \xrightarrow{\mathcal{F}\epsilon'} & \mathcal{F}C'_0 & \xrightarrow{\mathcal{F}d'_1} & \mathcal{F}C'_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}d'_2} & \mathcal{F}C'_2 \xrightarrow{\mathcal{F}d'_3} \dots \\ \mathcal{F}\mu \downarrow & & \mathcal{F}\alpha_0 \downarrow & \mathcal{F}s_0 \swarrow \mathcal{F}\alpha_1 \downarrow & \mathcal{F}s_1 \swarrow \mathcal{F}\alpha_2 \downarrow & \mathcal{F}s_2 \swarrow & \\ \mathcal{F}M & \xrightarrow{\mathcal{F}\epsilon} & \mathcal{F}C_0 & \xrightarrow{\mathcal{F}d_1} & \mathcal{F}C_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}d_2} & \mathcal{F}C_2 \xrightarrow{\mathcal{F}d_3} \dots \end{array}$$

Wegen der Additivität und Kontravarianz von  $\mathcal{F}$  folgt:

$$\mathcal{F}\alpha_i - \mathcal{F}\beta_i = \mathcal{F}(\alpha_i - \beta_i) = \mathcal{F}(d'_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i) = \mathcal{F}d_i \circ \mathcal{F}s_{i-1} + \mathcal{F}s_i \circ \mathcal{F}d'_{i+1}.$$

Mit den Definitionen  $d^i = \mathcal{F}d'_{i+1}$ ;  $d'^i = \mathcal{F}d_{i+1}$ ;  $s^i = \mathcal{F}s_{i-1}$  zeigt dies

$$\mathcal{F}\alpha_i - \mathcal{F}\beta_i = d'^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i,$$

also  $\mathcal{F}\alpha \sim \mathcal{F}\beta$  nach (A.4). Die Gruppen-Version von Lemma A.2.9 liefert schließlich  $\widetilde{\mathcal{F}\alpha_i} = \widetilde{\mathcal{F}\beta_i}$ , und somit die erste Aussage.

ii.) Wir haben für  $\mu = \text{id}_{\mathcal{M}}$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xleftarrow{\mathcal{F}d_3} & \mathcal{F}C_2 & \xleftarrow{\mathcal{F}d_2} & \mathcal{F}C_1 & \xleftarrow{\mathcal{F}d_1} & \mathcal{F}C_0 \xleftarrow{\mathcal{F}\epsilon} \mathcal{F}\mathcal{M} \\ & & \uparrow \mathcal{F}\beta_2 & & \uparrow \mathcal{F}\beta_1 & & \uparrow \mathcal{F}\beta_0 \\ \dots & \xleftarrow{\mathcal{F}\bar{d}_3} & \mathcal{F}\bar{C}_2 & \xleftarrow{\mathcal{F}\bar{d}_2} & \mathcal{F}\bar{C}_1 & \xleftarrow{\mathcal{F}\bar{d}_1} & \mathcal{F}\bar{C}_0 \xleftarrow{\mathcal{F}\bar{\epsilon}} \mathcal{F}\mathcal{M} \\ & & \uparrow \mathcal{F}\hat{\beta}_2 & & \uparrow \mathcal{F}\hat{\beta}_1 & & \uparrow \mathcal{F}\hat{\beta}_0 \\ \dots & \xleftarrow{\mathcal{F}d_3} & \mathcal{F}C_2 & \xleftarrow{\mathcal{F}d_2} & \mathcal{F}C_1 & \xleftarrow{\mathcal{F}d_1} & \mathcal{F}C_0 \xleftarrow{\mathcal{F}\epsilon} \mathcal{F}\mathcal{M}, \end{array}$$

womit

$$\text{id}_{\mathcal{F}C_i} = \mathcal{F}(\text{id}_{C_i}) \sim \mathcal{F}(\hat{\beta}_i \circ \beta_i).$$

Mit Lemma A.2.9 und A.2.5 iv.) erhalten wir

$$\text{id}_{H^i(\mathcal{F}C)} = \widetilde{\text{id}_{\mathcal{F}C_i}} = \mathcal{F}(\widetilde{\hat{\beta}_i \circ \beta_i}) = \widetilde{\mathcal{F}\beta_i \circ \mathcal{F}\hat{\beta}_i} = \widetilde{\mathcal{F}\beta_i} \circ \widetilde{\mathcal{F}\hat{\beta}_i}.$$

Analog folgt  $\text{id}_{H^i(\mathcal{F}\bar{C})} = \widetilde{\mathcal{F}\hat{\beta}_i} \circ \widetilde{\mathcal{F}\beta_i}$  womit  $\widetilde{\mathcal{F}\beta_i} = \widetilde{\mathcal{F}\hat{\beta}_i}^{-1}$ , also  $H^i(C) \simeq H^i(\bar{C})$  vermöge  $\eta^i = \widetilde{\mathcal{F}\beta_i}: H^i(\bar{C}) \rightarrow H^i(C)$ . ■

### Korollar A.2.16

Sind in der Situation von Lemma A.2.15 beide Komplexe  $(C, d, \epsilon)$ ,  $(C', d', \epsilon')$  projektive Auflösungen, so sind die zugehörigen Kohomologiegruppen  $H^i(\mathcal{F}C)$ ,  $H^i(\mathcal{F}C')$  sowie die Homomorphismen aus Lemma A.2.15 i.) bereits bis auf Verkettung mit Isomorphismen eindeutig bestimmt durch  $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mu$  und  $\mathcal{F}$ , hängen also nicht von der Wahl der Auflösungen ab.

BEWEIS: Die Isomorphie der Kohomologiegruppen folgt sofort aus Teil ii.) obigen Lemmas, da wir zwischen verschiedenen Auflösungen des selben Moduls via Isomorphismen wechseln können. Mit der Funktoreigenschaft von  $\mathcal{F}$  und  $\sim_i$  kann dann für Kettenabbildungen

$$\begin{aligned} \beta: (C, d, \epsilon) &\longrightarrow (\bar{C}, \bar{d}, \bar{\epsilon}) \\ \beta': (C', d', \epsilon') &\longrightarrow (\bar{C}', \bar{d}', \bar{\epsilon}') \\ \alpha: (C, d, \epsilon) &\longrightarrow (C', d', \epsilon') \end{aligned}$$

der Kohomologiegruppen-Homomorphismus  $\tau^i = (\eta^i)^{-1} \widetilde{\mathcal{F}\alpha_i} \eta^i$  geschrieben werden, als  $\mathcal{F}(\beta'_i \alpha_i \hat{\beta}_i)$ . Da nun aber  $\beta'_i \alpha_i \hat{\beta}_i: (\bar{C}, \bar{d}, \bar{\epsilon}) \rightarrow (\bar{C}', \bar{d}', \bar{\epsilon}')$  selbst eine Kettenabbildung ist, stimmt  $\tau$  mit allen anderen durch  $\mathcal{F}$  gewonnenen Kettenabbildungen überein. Dies zeigt die zweite Aussage des Korollars. ■

Das nächste Lemma liefert ein Kriterium welches garantiert, dass überhaupt eine projektive Auflösung eines  $R$ -Moduls existiert.

**Lemma A.2.17**

Gegeben ein unitärer Ring  $R$  und ein  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$ , so existiert eine freie Auflösung  $(C, d, \epsilon)$  von  $\mathcal{M}$ . Dabei bedeutet frei, dass die  $C_i$  freie  $R$ -Moduln sind.

BEWEIS: Wir wählen eine Indizierung  $J$  der Elemente von  $\mathcal{M}$  und betrachten die direkte Summe  $C_0 = \bigoplus^{|J|} R$ . Bezeichne  $\alpha_m \in J$  den zu  $m \in \mathcal{M}$  gehörigen Index, so definieren wir eine surjektive Abbildung  $\epsilon : \bigoplus^{|J|} R \rightarrow \mathcal{M}$  durch

$$\bigoplus 1_{\alpha_m} \rightarrow m,$$

und setzen diese  $R$ -linear auf ganz  $C_0$  fort.  $C_0$  ist dann per Definition ein freier  $R$ -Modul (je nachdem ob  $\mathcal{M}$  ein Links- oder Rechtsmodul ist, definiert man die  $R$ -Multiplikation in  $C_0$  in entsprechender Weise), und wir erhalten

$$\ker(\epsilon) \xrightarrow{i} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M},$$

wobei  $i$  die Inklusion von  $\ker(\epsilon)$  in  $C_0$  bezeichnet. Da  $\ker(\epsilon)$  ein Untermodul und somit selbst ein Modul ist, dürfen wir  $C_1 = \ker(\epsilon)$  und  $d_0 = i$  setzen, und erhalten  $\epsilon \circ d_0 = 0$  sowie  $\text{im}(i) = \ker(\epsilon)$ . Die Iteration von Schritt 1 mit  $C_1$  an Stelle von  $\mathcal{M}$  liefert eine freie Auflösung über  $\mathcal{M}$ . ■

**Korollar A.2.18**

Gegeben ein unitärer Ring  $R$  und ein  $R$ -Modul  $\mathcal{M}$ , so existiert eine projektive Auflösung  $(C, d, \epsilon)$  von  $\mathcal{M}$ .

BEWEIS: Das folgt sofort mit Lemma A.2.17 und Korollar A.1.17. ■

**Definition A.2.19 (Rechtsinduzierte Funktoren)**

Gegeben ein unitärer Ring  $R$  und ein kontravarianter Funktor  $\mathcal{F} : R\text{-mod} \rightarrow \text{Ab}$ , so ist der  $i$ -te rechtsinduzierte Funktor  $R^i \mathcal{F} : R\text{-mod} \rightarrow \text{Ab}$  definiert durch

$$\begin{aligned} R^i \mathcal{F}^{Ob} : R\text{-Moduln} &\rightarrow \text{abelsche Gruppen} \\ \mathcal{M} &\mapsto H^i(\mathcal{F}C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^i \mathcal{F}^{Mor} : \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{M}') &\rightarrow \text{Hom}_G(H^i(\mathcal{F}C'), H^i(\mathcal{F}C)) \\ \mu &\mapsto \widetilde{\mathcal{F}\alpha_i}. \end{aligned}$$

Dessen Wohldefiniertheit folgt aus Korollar A.2.16, wobei wir beliebige Auflösungen  $(C, d, \epsilon)$  und  $(C', d', \epsilon')$  von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  wählen dürfen.

Wir wollen nun ein Beispiel vorstellen, welches eine essentielle Rolle im Haupttext spielen wird.

**Beispiel A.2.20**

Gegeben ein  $R$ -Modul  $\mathcal{N}$ , dann ist der additive, kontravariante Funktor  $\text{hom}_R(\cdot, \mathcal{N})$  definiert durch

$$\begin{aligned} \text{hom}_R(\cdot, \mathcal{N})^{Obj}: R\text{-Moduln} &\longrightarrow \text{abelsche Gruppen} \\ \mathcal{M} &\longmapsto \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \text{hom}_R(\cdot, \mathcal{N})^{Mor}: \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{M}') &\longrightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(\mathcal{M}', \mathcal{N}), \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \\ \mu &\longmapsto [\alpha \mapsto \alpha \circ \mu]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Die Kontravarianz ist klar und die Additivität sieht man mit der Bilinearität von  $\circ$  bezüglich der Addition in  $\text{Hom}_R(\mathcal{M}', \mathcal{N})$  und  $\text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

Für einen unitären Ring  $R$  und einen  $R$ -Modul  $\mathcal{N}$  definieren wir den Funktor

$$\text{Ext}_R^i(\cdot, \mathcal{N}) = R^i \text{hom}_R(\cdot, \mathcal{N}).$$

Es ist dann

$$\text{Ext}_R^i(\cdot, \mathcal{N})(\mathcal{M}) = H^i(\text{hom}_R(\cdot, \mathcal{N})C) = H^i(\text{Hom}_R(C, \mathcal{N}), d^*),$$

für eine projektive Auflösung  $(C, d, \epsilon)$  von  $\mathcal{M}$ . Hierbei bezeichnet  $(\text{Hom}_R(C, \mathcal{N}), d^*)$  den durch Anwendung des  $\text{hom}_R$ -Funktors auf  $(C, d)$  entstehenden Gruppen-Kokettenkomplex mit Kettengliedern  $\mathcal{F}C_i = \text{hom}_R(\cdot, \mathcal{N})C_i = \text{Hom}_R(C_i, \mathcal{N})$  und Kettendifferentialen  $d^i = d_{i+1}^* = \text{hom}_R(\cdot, \mathcal{N})d_{i+1}$ . Als Anwendung berechnen wir  $\text{Ext}_R^0(\cdot, \mathcal{N})(\mathcal{M})$ :

Wir haben

$$\dots \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$$

$$\text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\epsilon^*} \text{Hom}_R(C_0, \mathcal{N}) \xrightarrow{d_1^*} \text{Hom}_R(C_1, \mathcal{N}) \longrightarrow \dots$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^0(\cdot, \mathcal{N})(\mathcal{M}) &= H^0(\text{Hom}_R(C, \mathcal{N})) = \ker(\overbrace{\text{hom}_R^{Mor}(\cdot, \mathcal{N})d_1}^{d_1^*}) \\ &= \{\alpha \in \text{Hom}_R(C_0, \mathcal{N}) \mid \alpha \circ d_1 = 0\} \\ &= \{\alpha \in \text{Hom}_R(C_0, \mathcal{N}) \mid \ker(\alpha) \supseteq \text{im}(d_1) = \ker(\epsilon)\}, \end{aligned}$$

womit  $\text{Ext}_R^0(\cdot, \mathcal{N})(\mathcal{M}) \cong \text{Hom}_R(C_0 / \ker(\epsilon), \mathcal{N})$ . Da nun  $C_0 / \ker(\epsilon) \cong \text{im}(\epsilon) = \mathcal{M}$ , folgt  $\text{Ext}_R^0(\cdot, \mathcal{N})(\mathcal{M}) \cong \text{Hom}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .



## B. Lokalkonvexe Analysis

Dieser Abschnitt soll die analytischen Mittel bereitstellen, die im Haupttext benötigt werden. Dabei werden wir den Begriff des topologischen Raumes als bekannt voraussetzen. Beginnen werden wir mit grundlegenden Definitionen und wichtigen Sätzen (ohne Beweis). Der zweite Teil behandelt die Konzepte der Vollständigkeit und der stetigen Fortsetzungen. Enden wird dieser mit zwei wichtigen Sätzen, die garantieren, dass man in lokal konvexen Vektorräumen stetige multilineare Abbildungen stetig multilinear auf eine immer existierende Vervollständigung besagten lokalkonvexen Vektorraumes fortsetzen kann. Der letzte Abschnitt behandelt topologische Tensorprodukte lokalkonvexer Vektorräume. Sei hierfür im Folgenden  $\mathbb{K}$  immer  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

### B.1. Grundlagen

Die hier dargestellten Zusammenhänge sind auch in [Rud91] und [BB93] zu finden.

#### Definition B.1.1 (Halbnorm)

Gegeben ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$  und eine Abbildung  $p: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , dann heißt  $p$  Halbnorm auf  $\mathbb{V}$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$i.) \quad p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{V};$$

$$ii.) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{V}.$$

Es folgt unter anderem  $p(x) \geq 0$ ,  $p(0) = 0$ ,  $p(x) = p(-x)$ ,  $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{V}$ , zudem sind die Halbnormenbälle  $B_{p,\epsilon}(0) := \{x \in \mathbb{V} \mid p(x - p) < \epsilon\}$  konvex, ausgeglichen und absorbierend. Dabei heißt eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{V}$

i.) *konvex*, falls:

$$\sum_{i=1}^n t_i U \subseteq U \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und alle } t_1, \dots, t_n > 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^n t_i = 1;$$

ii.) *ausgeglichen*, falls:

$$\lambda U \subseteq U \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1;$$

iii.) *absorbierend*, falls für jedes  $x \in \mathbb{V}$  ein  $\lambda > 0$  derart existiert, dass für alle  $\alpha \geq \lambda$   $x \in \alpha U := \{y \in \mathbb{V} \mid \exists u \in U \text{ mit } y = \alpha u\}$  gilt.

Hierfür beachte man, dass hier und im Folgenden mit  $\alpha \geq 0$  insbesondere immer  $\alpha \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  gemeint ist.

**Definition B.1.2**

Gegeben ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$  und ein Halbnormensystem (d.h. eine Menge von Halbnormen)  $P$  auf  $\mathbb{V}$ .

- i.)  $P$  heißt separierend, falls zu jedem  $x \in \mathbb{V}$  ein  $p \in P$  derart existiert, dass  $p(x) \neq 0$ .
- ii.)  $P$  heißt filtrierend, falls zu jeder endlichen Teilmenge  $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq P$  von Halbnormen ein  $p_I \in P$  existiert, so dass  $p_I(x) \geq p_\alpha(x) \forall \alpha \in I, \forall x \in \mathbb{V}$ .

**Bemerkung B.1.3**

- i.) Folgender Satz zeigt, dass jedes Halbnormensystem  $P$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$  diesen zu einem topologischen Vektorraum macht (Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind stetig in den jeweiligen Produkttopologien). Die Separationseigenschaft von  $P$  garantiert dann, dass besagte Topologie hausdorffsch ist. Abweichend zu [Rud91] wollen wir also die Abgeschlossenheit von Punkten  $x \in \mathbb{V}$ , aus der bereits die Hausdorff-Eigenschaft eines topologischen Vektorraumes folgt, nicht voraussetzen
- ii.) Es ist klarerweise immer möglich zu jeder endlichen Teilmenge  $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq P$  durch  $p_I(x) := \max_{\alpha \in I}(p_\alpha(x))$  eine Halbnorm zu definieren, für die  $p_I(x) \geq p_\alpha(x)$  für alle  $\alpha \in I, x \in \mathbb{V}$  gilt. Mit  $\bar{P}$  als die Menge aller dieser Halbnormen erhalten wir so ein filtrierendes Halbnormensystem auf  $\mathbb{V}$ . Folgender Satz besagt dann ebenfalls, dass sowohl  $P$  als auch  $\bar{P}$  dieselbe Topologie auf  $\mathbb{V}$  definieren.

Man beachte, dass zudem folgende Gleichheit erfüllt ist:

$$B_{p_I, \epsilon}(x) = \bigcap_{\alpha \in I} B_{p_\alpha, \epsilon}(x).$$

- iii.) Sei  $\mathcal{M}$  eine Menge. Eine Subbasis einer Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $\mathcal{M}$  ist ein Teilsystem  $O \subseteq \mathcal{T}$  derart, dass jedes  $U \in \mathcal{T}$  als beliebige Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen aus  $O$  geschrieben werden kann. Des Weiteren erhalten wir aus jeder beliebigen Sammlung  $O \subseteq \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen aus  $\mathbb{V}$  eine Topologie  $\mathcal{T}_O$  auf  $\mathbb{V}$  indem wir  $\mathcal{T}_O$  als das System aller Mengen definieren, die als beliebige Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen aus  $O$  geschrieben werden können. Diese wollen wir im Folgenden als die durch  $O$  auf  $\mathbb{V}$  induzierte Topologie bezeichnen. Per Definition ist dann insbesondere klar, dass  $O$  eine Subbasis von  $\mathcal{T}_O$  ist.
- iv.) Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$  heißt Umgebungsbasis von  $x \in \mathcal{M}$ , falls für jede offene Umgebung  $V$  von  $x$  ein  $U \in \mathcal{B}$  derart existiert, dass  $U \subseteq V$ .

Der folgende Satz fasst die für uns relevanten topologischen Aspekte aus [BB93] zusammen. Der Beweis ist nicht wirklich schwer, aber sehr technisch und wir wollen an dieser Stelle darauf verzichten.

**Satz B.1.4**

Sei  $\mathbb{V}$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $P$  ein System von Halbnormen auf  $\mathbb{V}$ , dann gilt:

- i.) Die durch die Sammlung aller Halbnormenbälle auf  $\mathbb{V}$  induzierte Topologie  $\mathcal{T}_P$  macht  $\mathbb{V}$  zu einem topologischen Vektorraum  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$ .
- ii.) Es ist  $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_{\overline{P}}$ .
- iii.) Sei  $U \subseteq \mathbb{V}$ , so ist genau dann  $U \in \mathcal{T}_P$ , wenn  $U$  mit jedem  $x \in \mathbb{V}$  auch einen ganzen Halbnormball  $B_{\overline{p}, \epsilon}(x)$  mit  $\epsilon > 0$  und  $\overline{p} \in \overline{P}$  enthält.
- iv.) Es ist  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$  genau dann hausdorffsch, wenn  $P$  separierend ist.
- v.)  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$  besitzt eine konvexe, ausgeglichene Umgebungsbasis der 0.
- vi.) Gegeben eine Halbnorm  $q$  auf  $\mathbb{V}$ , so ist diese genau dann bezüglich  $\mathcal{T}_P$  stetig, wenn ein  $\overline{p} \in \overline{P}$  und ein  $c > 0$  derart existiert, dass

$$q(x) \leq c \overline{p}(x) \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

**Korollar B.1.5**

- i.) Halbnormen sind stetig in der von ihnen induzierten Topologie.
- ii.) Bezeichne  $\tilde{P}$  das filtrierende System aller bezüglich  $\mathcal{T}_P$  stetigen Halbnormen. Dann gilt  $\mathcal{T}_{\tilde{P}} = \mathcal{T}_P$ .
- iii.) Gegeben zwei Halbnormensysteme  $P$  und  $Q$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$ , so gilt genau dann  $\mathcal{T}_Q \subseteq \mathcal{T}_P$ , wenn für jedes  $q \in Q$  ein  $\overline{p} \in \overline{P}$  derart existiert, dass:

$$q(x) \leq c \overline{p}(x) \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

- iv.) Ist  $P$  breits filtrierend, so gilt iii.) auch mit  $p \in P$  anstelle von  $\overline{p} \in \overline{P}$ .

BEWEIS: i.) Dies folgt sofort aus Satz B.1.4 vi.), da  $P \subseteq \overline{P}$ .

- ii.) Die Aussage  $\mathcal{T}_P \subseteq \mathcal{T}_{\tilde{P}}$  folgt unmittelbar aus i.), da hiermit  $P \subseteq \tilde{P}$  gilt und somit eine Subbasis von  $\mathcal{T}_P$  in  $\mathcal{T}_{\tilde{P}}$  enthalten ist. Für die umgekehrte Inklusion sei  $\tilde{p} \in \tilde{P}$  stetig bezüglich  $\mathcal{T}_P$ . Dann ist  $B_{\tilde{p}, \epsilon}(0) = \tilde{p}^{-1}([0, \epsilon))$  offen in  $\mathcal{T}_P$ , da  $[0, \epsilon)$  offen in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist. Mit der Stetigkeit der Addition folgt die separate Stetigkeit der Addition und hiermit die Stetigkeit der Translationsoperation auf Teilmengen von  $\mathbb{V}$ . Damit sind translierte offene Mengen offen und mit

$$B_{\tilde{p}, \epsilon}(x) = x + B_{\tilde{p}, \epsilon}(0)$$

folgt, dass eine Subbasis von  $\mathcal{T}_{\tilde{P}}$  in  $\mathcal{T}_P$  enthalten ist. Dies zeigt  $\mathcal{T}_{\tilde{P}} \subseteq \mathcal{T}_P$ .

- iii.) Gilt besagte Abschätzbarkeit, so ist nach Satz B.1.4 vi.) jedes  $q \in Q$  stetig bezüglich  $\mathcal{T}_P$ , also  $Q \subseteq \tilde{P}$  und somit  $\mathcal{T}_Q \subseteq \mathcal{T}_{\tilde{P}} = \mathcal{T}_P$ . Für die umkehrte Implikation sei  $q \in Q$ . Dann ist  $q$  stetig bezüglich  $\mathcal{T}_Q$  und wegen  $\mathcal{T}_Q \subseteq \mathcal{T}_P$  auch stetig bezüglich  $\mathcal{T}_P$ . Damit folgt die Ungleichung unmittelbar aus Satz B.1.4 vi.).
- iv.) Gilt die Abschätzbarkeit für  $P$ , so offenbar auch für  $\overline{P}$ . Ist  $P$  filtrierend, so lässt sich jedes  $\bar{p} \in \overline{P}$  durch ein  $p \in P$  abschätzen. Dies zeigt die andere Richtung. ■

### Bemerkung B.1.6

Wir wollen einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}$  lokalkonvex nennen, wenn er ein topologische Vektorraum  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_{\mathbb{V}})$  ist, dessen Topologie durch ein Halbnormensystem  $P$  erzeugt wird, also  $\mathcal{T}_{\mathbb{V}} = \mathcal{T}_P$  für ein Halbnormensystem  $P$  auf  $\mathbb{V}$  gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass die Topologie  $\mathcal{T}_{\mathbb{V}}$  eine konvexe Umgebungsbasis  $\mathcal{B}$  der 0 besitzt (jede konvexe 0-Umgebung enthält eine ausgeglichene konvexe 0-Umgebung, vgl. [Rud91, Thm 1.14]). Die eine Richtung folgt dabei sofort aus Satz B.1.4 v.).

Für die Andere müssen wir uns aus einer derartigen lokalkonvexen Basis ein  $\mathcal{T}_{\mathbb{V}}$  erzeugendes Halbnormensystem verschaffen. Dies geschieht mit Hilfe des sogenannten Minkowski-Funktional, dass für eine absorbierende Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{V}$  definiert ist durch:

$$\mu_U(x) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \{x \in tU\} \quad x \in \mathbb{V} \quad (\text{B.1})$$

Dieses ist im Falle eines konvexen, ausgeglichenen  $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{V}}$  eine Halbnorm auf  $\mathbb{V}$ .

In der Tat sind vermöge der Stetigkeit der Skalarmultiplikation alle offene Teilmengen von topologischen Vektorräumen absorbierend und somit (B.1) wohldefiniert. Die Konvexität von  $U$  induziert hierbei die Dreiecksungleichung, und die Ausgeglichenheit sichert Eigenschaft i.). Für ausgeglichenes, konvexes  $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{V}}$  zeigt man:

$$i.) \quad U = B_{\mu_U, 1}(0);$$

$$ii.) \quad \mu_U \text{ ist stetig in } \mathcal{T}_{\mathbb{V}}.$$

Bezeichne  $\mathcal{T}_{\mu}$  die aus allen derartigen Minkowski-Halbnormen erhaltene Topologie auf  $\mathbb{V}$ , so zeigt i.), dass  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mu}$  und mit der Stetigkeit der Translation auch  $\mathcal{T}_{\mathbb{V}} \subseteq \mathcal{T}_{\mu}$ , da wir hiermit aus einer Umgebungsbasis der 0 vermöge Translation eine Umgebungsbasis jedes Punktes erhalten.

Umgekehrt folgt mit ii.), dass  $B_{\mu_U, \epsilon}(0) = \mu_U^{-1}([0, \epsilon))$  offen in  $\mathcal{T}_{\mathbb{V}}$  und somit  $\mathcal{T}_{\mu} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{V}}$  wieder mit der Stetigkeit der Translation und demselben Subbasis-Argument wie in Korollar B.1.5 ii). Insgesamt folgt  $\mathcal{T}_{\mathbb{V}} = \mathcal{T}_{\mu}$  und somit die behauptete Äquivalenz.

Folgender Satz offeriert ein handhabbares Stetigkeitskriterium für multilineare Abbildungen zwischen lokalkonvexen Vektorräumen, welche wir im Folgenden auch abkürzend als lkVR's bezeichnen werden.

**Satz B.1.7**

Gegeben lokalkonvexe Vektorräume  $(E_1, \mathcal{T}_{E_1}), \dots, (E_k, \mathcal{T}_{E_k})$  und  $(F, \mathcal{T}_F)$  und filtrierend gewählte Halbnormensysteme  $P_1, \dots, P_k, Q$ , die obige Topologien erzeugen. Sei

$$\Phi: E_1 \times \dots \times E_k \longrightarrow F$$

eine multilineare Abbildung, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i.)  $\Phi$  ist stetig;
- ii.)  $\Phi$  ist stetig bei 0;
- iii.) Für jedes  $q \in Q$  existiert ein Satz  $\{p_1, \dots, p_k\}$  mit  $p_i \in P_i, 1 \leq i \leq k$  und eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$q(\Phi(x_1, \dots, x_k)) \leq c \prod_{i=1}^k p_i(x_i) \quad \forall x_i \in E_i, 1 \leq i \leq k.$$

BEWEIS: Einen Beweis für den lineare Fall findet man in [BB93, Satz 1.12]. Die Verallgemeinerung auf den multilinearen Fall ist rein technischer Natur. ■

## B.2. Vervollständigungen

Eine konsistente Darstellung der hier behandelten Zusammenhänge unter Verwendung des Filter-Begriffes findet man beispielsweise in [Tre67, Kapitel 5]. Wir geben hier eine eigene Darstellung mit Hilfe von Netzen.

**Definition B.2.1 (Netze, Vollständigkeit)**

i.) Eine gerichtete Menge  $(I, \geq)$  ist eine Menge  $I$  mit einer Relation  $\geq$  derart, dass:

- a.)  $\alpha \geq \alpha \forall \alpha \in I$ ;
- b.)  $\alpha \geq \beta, \beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in I$ ;
- c.)  $\alpha, \beta \in I \Rightarrow \exists \gamma \in I$  mit  $\gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta$ .

ii.) Ein Netz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$  in einer Menge  $X$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}: I &\longrightarrow X \\ \alpha &\longmapsto x_\alpha, \end{aligned}$$

von einer gerichteten Menge  $I$  nach  $X$ .

iii.) Gegeben ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T}_X)$  und ein Netz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq X$ , so heißt  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$  konvergent gegen  $x \in X$ , wenn für jedes  $U \in \mathcal{T}_X$  mit  $x \in U$  ein  $\alpha_U \in I$  existiert, so dass  $x_\alpha \in U$  für alle  $\alpha \geq \alpha_U$ . Wir schreiben dann  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x$  und im hausdorffschen Fall  $\lim_{\alpha} x_\alpha = x$ , da dann besagter Konvergenzpunkt eindeutig ist. Ganz allgemein bezeichnen wir mit  $\lim_{\alpha} x_\alpha \subseteq X$  die Menge aller Konvergenzpunkte von  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .

- iv.) Gegeben ein topologischer Vektorraum  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_{\mathbb{V}})$ , so heißt ein Netz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{V}$  ein Cauchynetz, wenn für jede 0-Umgebung  $U \in \mathcal{T}_P$  ein  $\gamma_U \in I$  derart existiert, dass:

$$(x_\alpha - x_\beta) \in U \quad \forall \alpha, \beta \geq \gamma_U \in I.$$

Handelt es sich hierbei um einen lokalkonvexen Vektorraum  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$ , so ist dies mit Satz B.1.4 iii.) gleichbedeutend damit, dass für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes  $\bar{p} \in \bar{P}$  ein  $\gamma_{\bar{p}, \epsilon} \in I$  existiert, so dass

$$p(x_\alpha - x_\beta) < \epsilon \quad \forall \alpha, \beta \geq \gamma_{\bar{p}, \epsilon} \in I$$

gilt. Wegen  $\bar{p} = \max_{\beta \in J} p_\beta$  mit  $p_\beta \in P$  und  $B_{\bar{p}, \epsilon}(0) = \bigcap_{\beta \in J} B_{p_\beta, \epsilon}(0)$ <sup>1</sup>, reicht es mit der Endlichkeit des Schnittes sogar aus, obige Abschätzbarkeit nur für alle  $p \in P$  zu fordern.

- v.) Ein topologischer Vektorraum heißt vollständig, falls für jedes Cauchynetz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{V}$  gilt, dass  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x$  für ein  $x \in X$ .

### Bemerkung B.2.2 (Netze)

Die Bedeutung von Netzen sieht man an den folgenden drei essentiellen Punkten:

- i.) Punkt eins ist der, dass es durchaus auch lokalkonvexe Vektorräume mit überabzählbaren Halbnormensystemen geben kann. Für filtrierendes  $P$  bilden dann nämlich die Halbnormbälle  $B_{p, \frac{1}{n}}(x)$  mit Radius  $r = \frac{1}{n}$  eine Umgebungsbasis von  $x \in \mathbb{V}$ . Mit einer Folge alleine ist nun dieser Punkt a priori nicht approximierbar, denn wir brauchen ja in der Tat für jedes  $p$  eine ganze Folge, die bezüglich dieser Ballsorte  $B_{p, \cdot}$  gegen  $x$  konvergiert. Für abzählbare Halbnormensysteme  $P = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  liegt der Fall hingegen anders, denn sei

$$\tilde{p}_n(x) = \max_{l \leq n} (p_l(x)),$$

so bilden die abzählbar vielen Bälle  $B_{\tilde{p}_n, \frac{1}{n}}(x)$  eine Umgebungsbasis von  $x$  und wir kommen mit nur einer Folge aus, wenn wir  $x$  approximieren wollen. Diese vage Vorstellung ist dabei Ausdruck des allgemeinen Faktes, dass ein topologischer Vektorraum  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_{\mathbb{V}})$  mit einer abzählbaren 0-Umgebungsbasis  $\mathcal{B}$  genau dann vollständig ist, wenn er folgenvollständig ist, also jede Cauchyfolge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{V}$  gegen ein  $x \in \mathbb{V}$  konvergiert. Dies ist dann insbesondere für normierte Vektorräume der Fall.

- ii.) Eine Abbildung  $f$  zwischen zwei topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  ist genau dann stetig, wenn für jeden Punkt  $x \in X$  und jedes Netz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x$  gilt, dass  $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in I} \rightarrow f(x) \in Y$ .

---

<sup>1</sup>vgl. Bemerkung B.1.3 ii.)

Diese Aussage ist diffizil, denn in der Tat muss man sich darüber im klaren sein, dass im Nicht-Hausdorff-Fall sowohl  $\lim_{\alpha} x_{\alpha}$ , als auch  $\lim_{\alpha} f(x_{\alpha})$  mehrelementige Mengen sein können.

iii.) Sei  $(X, \mathcal{T}_X)$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ . Dann ist der topologische Abschluss  $\overline{Y}$  von  $Y$  bezüglich  $(X, \mathcal{T}_X)$  definiert, als die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , in der  $Y$  enthalten ist. Dann gilt

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{T}_X \text{ mit } x \in U \text{ ist } U \cap Y \neq \emptyset\}$$

und hiermit zeigt man, dass  $\overline{Y}$  gerade die Menge aller  $x \in X$  ist, für die es Netze  $\{y_{\alpha}^x\}_{\alpha \in I} \subseteq Y$  derart gibt, dass  $\lim_{\alpha} y_{\alpha}^x = x$  gilt. Ist  $\overline{Y} = X$ , so heißt  $Y$  dicht in  $X$ .

**Definition B.2.3 ( $\sim$ , Kanonischer Repräsentant, Isometrie)**

Gegeben ein lokalkonvexer Vektorraum  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_P)$  und bezeichne  $\mathcal{N}_C(\mathbb{V})$  die Klasse<sup>2</sup> aller Cauchynetze in  $\mathbb{V}$ .

i.) Wir definieren eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathcal{N}_C(\mathbb{V})$  wie folgt. Es sei genau dann

$$\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \sim \{y_{\beta}\}_{\beta \in J},$$

wenn für jedes  $p \in P$  das Netz  $\{p_{\alpha, \beta}\}_{I \times J} := \{p(x_{\alpha} - y_{\beta})\}_{I \times J}$  gegen 0 konvergiert. Hierfür sei  $I \times J$  mit der Relation

$$(\alpha, \beta) \geq (\alpha', \beta') \iff \alpha \geq \alpha' \wedge \beta \geq \beta'$$

bestückt. Es ist dann unmittelbar klar, dass  $\sim$  reflexiv und symmetrisch ist. Die Transitivität folgt mit der Dreiecksungleichung für Halbnormen. Ist  $(\mathbb{V}, \mathcal{T}_{\mathbb{V}})$  hausdorffsch und existiert der eindeutige Limes  $\lim_{\alpha} x_{\alpha} = x$ , so gilt:

$$\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \sim \{y_{\beta}\}_{\beta \in J} \iff \lim_{\alpha} x_{\alpha} = \lim_{\beta} y_{\beta}. \quad (\text{B.2})$$

Für „ $\implies$ “ beachten wir, dass

$$p(y_{\beta} - x) \leq \overbrace{p(y_{\beta} - x_{\alpha})}^{< \frac{\epsilon}{2} \text{ für } (\alpha, \beta) \geq (\alpha', \beta')} + \overbrace{p(x_{\alpha} - x)}^{< \frac{\epsilon}{2} \text{ für } \alpha \geq \alpha''} < \epsilon,$$

falls  $(\alpha, \beta) \geq (\tilde{\alpha}, \beta') \in I \times J$  mit  $\tilde{\alpha} \geq \alpha', \alpha''$ .

„ $\longleftarrow$ “ erhalten wir mit

$$p(y_{\beta} - x_{\alpha}) \leq p(y_{\beta} - z) + p(z - x_{\alpha}) < \epsilon$$

für alle  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha', \beta') \in I \times J$ .

<sup>2</sup>Für jede Menge  $M$  wird deren Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$ , ausgestattet mit der Inklusionsrelation, zu einer gerichteten Menge. Somit steht diese Sammlung von Mengen in Bijektion zu der Klasse der Mengen, von der wir in Definition A.1.18 gesehen hatten, dass sie keine Menge ist.

ii.) Gegeben ein Cauchynetz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{V}$ . Wir statten die Menge  $P \times \mathbb{N}$  mit der Relation

$$(p, n) \geq (p', n') \iff p \geq p' \wedge n \geq n',$$

aus, wobei  $p \geq p'$  bedeuten soll, dass  $p(x) \geq p'(x)$  für alle  $x \in \mathbb{V}$ .

Für festes  $p$  finden wir per Definition ein  $\gamma_{p,n} \in I$  derart, dass  $(x_\alpha - x_\beta) \in B_{p, \frac{1}{2n}}(0)$  für alle  $\alpha, \beta \geq \gamma_{p,n}$ , und mit Definition B.2.1 i.) c.) erreichen wir zudem die Vergleichbarkeit:

$$\dots \geq \gamma_{p,n+1} \geq \gamma_{p,n} \geq \gamma_{p,n-1} \geq \dots$$

Vermöge

$$\{x_{p,n}\}_{P \times \mathbb{N}} := \{x_{\gamma_{p,n}}\}_{P \times \mathbb{N}}$$

erhalten wir so ein zu  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$  äquivalentes Cauchynetz. Dieses bezeichnen wir im Folgenden als das zu  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$  gehörige kanonische Netz bzw. den zu  $[\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}] \in \mathcal{N}_C(\mathbb{V}) / \sim$  gehörigen kanonischen Repräsentanten.

In der Tat folgt für  $(p', n'), (p'', n'') \geq (p, n)$  mit  $\alpha \geq_I \gamma_{n', p'}, \gamma_{n'', p''}$ :

$$\begin{aligned} p(x_{p', n'} - x_{p'', n''}) &\leq p(x_{p', n'} - x_\alpha) + p(x_\alpha - x_{p'', n''}) \\ &\leq p'(x_{p', n'} - x_\alpha) + p''(x_\alpha - x_{p'', n''}) \\ &< \frac{1}{2n'} + \frac{1}{2n''} \leq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

was die Cauchyeigenschaft zeigt. Dabei bezeichnet  $\geq_I$  die ursprüngliche Ordnungsrelation auf  $I$ . Die Äquivalenz folgt mit

$$\begin{aligned} p(x_{p', n'} - x_\alpha) &\leq p(x_{p', n'} - x_{p, n}) + p(x_{p, n} - x_\alpha) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

für alle  $(p', n') \geq (p, n)$ ,  $\alpha \geq_I \gamma_{p, n}$  und somit  $\lim_{([p, n], \alpha)} p(x_{p, n} - x_\alpha) = 0$ .

Diese Festlegung auf die feste gerichtete Menge  $P \times \mathbb{N}$  zeigt insbesondere, dass besagter Quotient eine echte Menge ist. Denn in der Tat ist somit  $\mathcal{N}_C(\mathbb{V}) / \sim$  auffassbar als Teilmenge von  $(P \times \mathbb{N}) \times \mathbb{V}$ .

iii.) Gegeben zwei lkVR's  $(X, P)$ ,  $(X', P')$  und eine Zuordnung  $i$ , bestehend aus Abbildungen:

$$\begin{aligned} i_X: X &\longrightarrow X' \\ i_P: P &\longrightarrow P'. \end{aligned}$$

Dann heißt  $i$  Isometrie, falls  $i_X$  linear,  $i_P$  bijektiv und für alle  $x \in X$  und alle  $p \in P$  folgende Gleichheit erfüllt ist:

$$i_P(p)(i_X(x)) = p(x).$$



Da keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir im Folgenden werden die Indizes unterdrücken und einfach nur noch  $i$  anstelle von  $i_P$  und  $i_X$  schreiben.

Wir benötigen folgende vorbereitende Proposition:

**Proposition B.2.4**

Gegeben ein lkVR  $(X, P)$ .

i.) Gegeben ein Netz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq X$ . Existiert ein  $\epsilon > 0$  und für jedes  $p \in P$  ein  $\alpha_{p,\epsilon}$  derart, dass  $p(x_\alpha) < \epsilon$  für alle  $\alpha \geq \alpha_\epsilon \in I$  gilt. Dann existiert der Limes und es ist  $\lim_\alpha p(x_\alpha) \leq \epsilon$ .

ii.) Sei  $(X, P)$  hausdorffsch und  $\{x_{\alpha,\beta}\}_{I \times J} \subseteq X$  ein Netz derart, dass  $\lim_\beta x_{\alpha,\beta}$  für alle  $\alpha \in I$  existiert. Dann gilt:

- Existiert der Limes  $\lim_{\alpha \times \beta} x_{\alpha,\beta}$ , so gilt:

$$\lim_\alpha \left[ \lim_\beta x_{\alpha,\beta} \right] = \lim_{\alpha \times \beta} x_{\alpha,\beta}.$$

- Existiert der Limes  $\lim_\alpha \left[ \lim_\beta x_{\alpha,\beta} \right]$  und ist  $\{x_{\alpha,\beta}\}_{I \times J} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} + \{y_\beta\}_{\beta \in J}$  mit Netzen  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{y_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq X$ , so gilt:

$$\lim_{\alpha \times \beta} x_{\alpha,\beta} = \lim_\alpha \left[ \lim_\beta x_{\alpha,\beta} \right].$$

iii.) Sei  $(X, P)$  hausdorffsch, dann ist jede Isometrie injektiv.

iv.) Isometrien sind stetig und sogar gleichmäßig stetig.

v.) Sei  $(X, P)$  hausdorffsch und  $(X', P'), (X'', P'')$  vollständige hlkVR's mit Isometrien

$$i': X \longrightarrow X'$$

$$i'': X \longrightarrow X''$$

derart, dass  $\overline{i'(X)} = X'$  und  $\overline{i''(X)} = X''$  gilt. Dann sind  $(X', P')$  und  $(X'', P'')$  zueinander linear homöomorph.

BEWEIS: i.) Zunächst ist  $\{p(x_\alpha)\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}$  wegen

$$|p(x_\alpha) - p(x_\beta)| \leq p(x_\alpha - x_\beta) \leq p(x_\alpha) + p(x_\beta) < 2\epsilon \quad \forall \alpha, \beta \geq \alpha_\epsilon,$$

ein Cauchynetz und mit der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  zeigt dies, dass der Limes existiert. Für die Abschätzung argumentieren wir durch Widerspruch. Sei hierfür  $\lim_\alpha p(x_\alpha) = \delta > \epsilon$ . Dann existiert  $\Delta > 0$ , so dass  $B_\Delta(\delta) \cap [0, \epsilon] = \emptyset$  sowie ein  $\gamma_\Delta \in I$  derart, dass  $p(x_\alpha) \in B_\Delta(\delta)$  für alle  $\alpha \geq \gamma_\Delta$  gilt.

Dies bedeutet insbesondere  $p(x_\alpha) > \epsilon \quad \forall \alpha \geq \gamma_\Delta$ . Nun finden wir aber  $\alpha' \in I$  mit  $\alpha' \geq \alpha_\epsilon$  und  $\alpha' \geq \gamma_\Delta$ , womit  $p(x_{\alpha'}) < \epsilon$  und gleichzeitig  $p(x_{\alpha'}) > \epsilon$  gelten müsste, was ein Widerspruch ist.

ii.) Für die erste Aussage sei  $\lim_{\alpha \times \beta} x_{\alpha, \beta} = x$  und  $x_\alpha = \lim_{\beta} x_{\alpha, \beta}$ . Dann gilt:

$$p(x_\alpha - x) = p\left(\lim_{\beta} x_{\alpha, \beta} - x\right) \stackrel{p \text{ stetig}}{=} \lim_{\beta} p(x_{\alpha, \beta} - x).$$

Nun existiert  $(\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon) \in I \times J$ , so dass  $p(x_{\alpha, \beta} - x) < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon)$  und i.) zeigt dass:

$$\lim_{\beta} p(x_{\alpha, \beta} - x) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall \alpha \geq \alpha_\epsilon.$$

Für die zweite Behauptung beachten wir, dass  $\lim_{\beta} x_{\alpha, \beta}$  existiert und mit der Stetigkeit der Addition  $\lim_{\beta} [x_\alpha + y_\beta] = x_\alpha + \lim_{\beta} y_\beta = x_\alpha + y$  für ein  $y \in X$  gilt. Durch Wiederholung dieser Argumentation folgt:

$$\lim_{\alpha} \left[ \lim_{\beta} x_{\alpha, \beta} \right] = \lim_{\alpha} [x_\alpha + y] = \lim_{\alpha} x_\alpha + y = x + y.$$

Dann existieren  $\alpha_\epsilon \in I$  und  $\beta_\epsilon \in J$ , so dass  $p(x_\alpha - x) < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $\alpha \geq \alpha_\epsilon$  und  $p(y_\beta - y) < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $\beta \geq \beta_\epsilon$ . Dies zeigt

$$p(x_{\alpha, \beta} - x + y) \leq p(x_\alpha - x) + p(y_\beta - y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

für alle  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon)$ .

iii.) Sei  $i: (X, P) \rightarrow (X', P')$  eine Isometrie und  $(X', P')$  ein lkVR. Nun ist  $X$  hausdorffsch und somit  $P$  separierend. Hiermit existiert für alle  $x, y \in X$  mit  $i(x) = i(y)$  und  $x \neq y$  ein  $p \in P$ , so dass  $p(x - y) \geq 0$  gilt. Dies liefert einen Widerspruch, denn wir erhalten:

$$0 = i(x) - i(y) \implies 0 = i(p)(i(x) - i(y)) = i(p)(i(x - y)) = p(x - y) \geq 0.$$

iv.) Sei  $p' \in P'$ . Dann ist  $p'(i(x) - i(y)) = i(p)(i(x) - i(y)) = p(x - y)$  für ein  $p \in P$ , womit:

$$p(x - y) < \delta \implies p'(i(x) - i(y)) < \epsilon = \delta \quad \forall x, y \in X.$$

Das zeigt die gleichmäßige Stetigkeit und insbesondere die Stetigkeit. Alternativ folgt diese so:

Sei  $x \in X$  mit  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x$ , dann finden wir für  $p' \in P'$  ein  $p \in P$  mit  $i(p) = p'$  und erhalten

$$p'(i(x_\alpha) - i(x)) = p(x_\alpha - x) < \epsilon \quad \forall \alpha \geq \gamma_\epsilon.$$

Dies zeigt  $\{i(x_\alpha)\}_{\alpha \in I} \rightarrow i(x)$  und somit die Stetigkeit.

v.) Zunächst sind Abbildungen  $i'_X: X \rightarrow i'(X) \subseteq X'$ ,  $i''_X: X \rightarrow i''(X) \subseteq X''$  bijektiv und somit  $h = i'' \circ i'^{-1}$  eine bijektive Isometrie  $h: i'(X) \rightarrow i''(X)$  mit  $h(p') = (i''_P \circ i'^{-1}_P)(p')$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} \bar{h}: X' &\rightarrow X'' \\ x' &\mapsto \lim_{\alpha} h(x'_\alpha) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

für ein Netz  $\{x'_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq i'(X)$  mit  $\lim_{\alpha} x'_\alpha = x'$ . Dabei ist die Existenz eines solchen Netzes gesichert, da nach Voraussetzung  $\overline{i'(X)} = X'$  gilt. Für die Existenz von  $\lim_{\alpha} h(x'_\alpha)$  beachtet man, dass für jedes  $p'' \in P''$  ein  $p' \in P'$  existiert, so dass

$$p''(h(x'_\alpha) - h(x'_\beta)) = h(p')(h(x'_\alpha - x'_\beta)) = p'(x'_\alpha - x'_\beta) < \epsilon$$

für alle  $\alpha, \beta \geq \gamma_\epsilon \in I$  gilt. Hiermit ist  $\{h(x'_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  ein Cauchynetz in  $X''$  und konvergiert nach Voraussetzung. Mit der Hausdorff-Eigenschaft von  $X''$  ist besagter Limes zudem eindeutig bestimmt.

Um die Wohldefiniertheit von (B.3) nachzuweisen, betrachten wir Netze  $\{x'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ,  $\{y'_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq i'(X)$  mit  $\{x'_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x'$  und  $\{y'_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow x'$ . Sei  $x'' = \lim_{\alpha} h(x'_\alpha)$ , so folgt mit (B.2):

$$\begin{aligned} p''(h(y'_\beta) - x'') &\leq p''(h(y'_\beta) - h(x'_\alpha)) + p''(h(x'_\alpha) - x'') \\ &= h(p')(h(y'_\beta) - h(x'_\alpha)) + p''(h(x'_\alpha) - x'') \\ &= p'(y'_\beta - x'_\alpha) + p''(h(x'_\alpha) - x''). \end{aligned}$$

Wegen  $x'' = \lim_{\alpha} h(x'_\alpha)$  existiert ein  $\alpha_\epsilon \in I$ , so dass  $p''(h(x'_\alpha) - x'') < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $\alpha \geq \alpha_\epsilon$  und nach Definition B.2.3 i.) ein  $(\alpha', \beta') \in I \times J$ , so dass  $p'(y'_{\beta'} - x'_{\alpha'}) < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha', \beta')$ . Mit Definition B.2.1 i.) c.) erhalten wir ein  $\alpha'' \geq \alpha', \alpha_\epsilon$ , womit  $p''(h(y'_\beta) - x'') < \epsilon$  für alle  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha'', \beta')$ . Dies zeigt  $\{h(y'_\beta)\}_{\beta \in J} \rightarrow x''$  und somit die Wohldefiniertheit von (B.3).

Wir wollen nun zeigen, dass  $\bar{h}$  eine Isometrie ist. Sei hierfür  $\{x'_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq i'(X)$  mit  $\{x'_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x'$ , dann folgt

$$\bar{h}(p')(\bar{h}(x')) = \lim_{\alpha} h(p')(h(x'_\alpha)) = \lim_{\alpha} p'(x_\alpha) = p'(x'),$$

wobei wir im letzten Schritt Korollar B.1.5 i.) benutzt haben.

Die Linearität von  $\bar{h}$  folgt mit der Linearität von  $h$ , Proposition B.2.4 ii.), der Unabhängigkeit von (B.3) von der Wahl des Netzes und der Stetigkeit der Addition in  $X'$ :

$$\begin{aligned} \bar{h}(x') + \bar{h}(y') &= \lim_{\alpha} h(x'_\alpha) + \lim_{\beta} h(y'_\beta) = \lim_{\alpha} \left[ \lim_{\beta} (h(x'_\alpha + y'_\beta)) \right] \\ &= \lim_{\alpha \times \beta} h(x'_\alpha + y'_\beta) = \bar{h}(x' + y'). \end{aligned}$$

Mit der Hausdorff-Eigenschaft von  $(X', P')$  folgen Stetigkeit und Injektivität von  $\bar{h}$  nun unmittelbar aus Teil iii.) und iv.) und es bleibt zu zeigen, dass  $\bar{h}$  surjektiv und  $\bar{h}^{-1}$  ebenfalls eine Isometrie darstellt. Dann wäre nämlich  $\bar{h}$  ein linearer Homöomorphismus und die Behauptung gezeigt.

Für die Surjektivität sei  $x'' \in X''$  vorgegeben. Da  $\overline{i''(X)} = X''$  finden wir ein Netz  $\{x''_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq i''(X'')$  mit  $\lim_\alpha x''_\alpha = x''$  und definieren:

$$\{x'_\alpha\}_{\alpha \in I} = \{h^{-1}(x''_\alpha)\}_{\alpha \in I} \subseteq i'(X'). \quad (\text{B.4})$$

Nun ist jedes konvergente Netz insbesondere ein Cauchynetz, womit für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\gamma_\epsilon \in I$  derart existiert, dass

$$p'(x'_\alpha - x'_\beta) = h(p')(h(x'_\alpha) - h(x'_\beta)) = h(p')(x''_\alpha - x''_\beta) < \epsilon \quad \forall \alpha, \beta \leq \gamma_\epsilon,$$

gilt. Hiermit ist (B.4) ebenfalls ein Cauchynetz und konvergiert folglich gegen ein  $x' \in X'$ . Wir erhalten dann

$$\bar{h}(x') = \lim_\alpha h(h^{-1}(x''_\alpha)) = \lim_\alpha x''_\alpha = x'',$$

also die Surjektivität von  $\bar{h}$ . Die Isometrieeigenschaft von  $\bar{h}^{-1}$  folgt mit

$$\bar{h}^{-1}(p'')(\bar{h}^{-1}(x'')) = (\bar{h} \circ \bar{h}^{-1})(p'')(\bar{h} \circ \bar{h}^{-1}(x'')) = p''(x''). \quad \blacksquare$$

### Satz B.2.5

Gegeben ein hlkVR  $(X, P)$ , dann existiert ein vollständiger lkVR  $(\hat{X}, \hat{P})$  zusammen mit einer Isometrie  $i : X \rightarrow \hat{X}$  derart, dass  $\overline{i(X)} = \hat{X}$ . Besagte Vervollständigung ist ebenfalls hausdorffsch und bis auf lineare Homöomorphie eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Die Eindeutigkeit ist klar mit Proposition B.2.4 v.). Für die Existenz betrachten wir die Menge  $\hat{X} = \mathcal{N}_C(X) / \sim$  und statten diese mit den Vektorraumoperationen  $\cdot : (\lambda, [\hat{x}]) \mapsto [\lambda \hat{x}]$  und  $+$  :  $([\hat{x}], [\hat{y}]) \mapsto [\hat{x} + \hat{y}]$  mit

$$\begin{aligned} \lambda \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} &:= \{\lambda x_\alpha\}_{\alpha \in I}, \\ \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} + \{y_\beta\}_{\beta \in I} &:= \{x_\alpha + y_\beta\}_{I \times J}. \end{aligned}$$

aus. Die Wohldefiniertheit dieser Abbildungen folgt unmittelbar aus den Halbnormeneigenschaften und der Definition von  $\sim$ . Des Weiteren topologisieren wir  $\hat{X}$  mit dem System  $\hat{P}$ , bestehend aus den Halbnormen:

$$\hat{p}([\hat{x}]) = \lim_\alpha p(x_\alpha) \quad \text{mit} \quad \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \in [\hat{x}] \in \hat{X}. \quad (\text{B.5})$$

Obige Isometrie erhalten wir dann durch die Zuordnungsvorschrift:  $i : x \mapsto [\{x, x, \dots\}]$  ( $x \in X$  wird die Äquivalenzklasse der konstanten Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (x, x, \dots)$  zugeordnet). Man sieht nebenbei bemerkt, dass  $i$  in der Tat nicht injektiv ist, falls  $P$  nicht hausdorffsch. Denn gilt für ein  $x \in X$   $p(x) = 0$  für alle  $p \in P$ , so folgt bereits  $i(x) = \hat{0} = [0]$ .

Wir müssen nun zunächst die Existenz des Limes in (B.5) und die Wohldefiniertheit dieser Zuordnungsvorschrift nachweisen. Erstere folgt dabei unmittelbar aus

$$|p(x_\alpha) - p(x_\beta)| \leq p(x_\alpha - x_\beta), \quad (\text{B.6})$$

womit  $\{p(x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  ein Cauchynet in  $\mathbb{R}$  ist und mit dessen Vollständigkeit konvergiert.

Für die Wohldefiniertheit sei  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \sim \{y_\beta\}_{\beta \in J}$ , dann folgt mit der Stetigkeit der Addition und  $\|\cdot\|$ :

$$\begin{aligned} \left| \lim_\alpha p(x_\alpha) - \lim_\beta p(y_\beta) \right| &= \left| \lim_\alpha \left[ \lim_\beta [p(x_\alpha) - p(y_\beta)] \right] \right| = \left| \lim_{\alpha \times \beta} [p(x_\alpha) - p(y_\beta)] \right| \\ &= \lim_{\alpha \times \beta} |p(x_\alpha) - p(y_\beta)| \stackrel{*, (\text{B.6})}{\leq} \lim_{\alpha \times \beta} p(x_\alpha - y_\beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Der zweite Schritt folgt dabei mit Proposition B.2.4 ii.) und  $*$  bedeutet den Erhalt von  $\leq$  unter Limesbildung.

Um die Halbnormeigenschaften von  $\hat{p}$  nachzuweisen rechnen wir

$$\hat{p}(\lambda \hat{x}) = \lim_\alpha p(\lambda x_\alpha) = \lambda \lim_\alpha p(x_\alpha) = \lambda \hat{p}(\hat{x})$$

und

$$\begin{aligned} \hat{p}(\hat{x} + \hat{y}) &= \lim_{\alpha \times \beta} p(x_\alpha + y_\beta) \stackrel{*}{\leq} \lim_{\alpha \times \beta} (p(x_\alpha) + p(y_\beta)) \\ &= \lim_\alpha \left[ \lim_\beta (p(x_\alpha) + p(y_\beta)) \right] = \hat{p}(\hat{x}) + \hat{p}(\hat{y}), \end{aligned}$$

wobei wir bei  $*$  wieder den Erhalt von  $\leq$  unter Limesbildung benutzt haben, im dritten Schritt Proposition B.2.4 ii.) und im letzten Schritt die Stetigkeit der Addition.

Für  $\overline{i(X)} = \hat{X}$  sei  $[\hat{x}] \in \mathcal{N}_C(X)/\sim$  und  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \in [\hat{x}]$ , dann existiert ein  $\gamma_{p,n} \in I$  derart, dass

$$p(x_\alpha - x_\beta) < \frac{1}{n} \quad \forall \alpha, \beta \geq \gamma_{p,n} \in I$$

und es folgt

$$\hat{p}([\{x_{\gamma_{p,n+1}}\}] - [\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}]) = \lim_\alpha p(x_{\gamma_{n+1,p}} - x_\alpha) \stackrel{**}{\leq} \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

mit  $** =$  Proposition B.2.4 i.). Dabei bezeichnet  $[\{x_{\gamma_{n+1,p}}\}]$  die Äquivalenzklasse der konstanten Folge  $\{x_{\gamma_{n+1,p}}, x_{\gamma_{n+1,p}}, \dots\} \subseteq X$ .

Dies bedeutet  $[\{x_{\gamma_{n+1,p}}\}] \in B_{\hat{p}, \frac{1}{n}}(\hat{x}) \cap i(X)$ . Also  $B_{\hat{p}, \frac{1}{n}}(\hat{x}) \cap i(X) \neq \emptyset$ , womit  $[\hat{x}] \in \overline{i(X)}$  und folglich  $\hat{X} \subseteq \overline{i(X)}$ . Die umgekehrte Inklusion ist klar mit Bemerkung B.2.2 iii.).

Für die Hausdorff-Eigenschaft sei  $\hat{p}([\hat{x}]) = 0$  für alle  $\hat{p} \in \hat{P}$ . Sei  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \in [\hat{x}]$ , so folgt  $\lim_\alpha p(x_\alpha) = 0 \ \forall p \in P$ , mithin  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \sim \{0\}$  für jedes 0-Netz  $\{0\}$ . Das zeigt  $[\hat{x}] = \hat{0}$ . Es bleibt die Vollständigkeit nachzuweisen. Sei hierfür  $\{[\hat{x}]_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \hat{X}$  ein Cauchynetz. Wir müssen dann zeigen, dass dieses Cauchynetz von Äquivalenzklassen von Cauchynetzen in  $X$  bezüglich  $\hat{P}$  gegen eine Äquivalenzklasse eines Cauchynetzes in  $X$  konvergiert.

Mit den Erläuterungen in Definition B.2.3 i.) reicht es dazu aus, dies für das zu  $\{[\hat{x}]_\alpha\}_{\alpha \in I}$  äquivalente kanonische Cauchynetz  $\{[\hat{x}]_{\hat{p},n}\}_{\hat{p} \times \mathbb{N}}$  zu zeigen. Jedes  $[\hat{x}]_{\hat{p},n}$  ist nun eine Äquivalenzklasse von Cauchynetzen in  $X$ , und auch hier wählen wir den kanonischen Repräsentanten  $\left\{([x]_{\hat{p},n})_{p',n'}\right\}_{P \times \mathbb{N}}$  bezüglich  $P$ . Es gilt also:

$$[\hat{x}]_{\hat{p},n} = \left[ \left\{ ([x]_{\hat{p},n})_{p,n} \right\}_{P \times \mathbb{N}} \right].$$

Da  $P \cong \hat{P}$  können wir ohne Schwierigkeiten

$$y_{p,n} = ([\hat{x}]_{\hat{p},n})_{p,n} \tag{B.7}$$

definieren und behaupten, dass dann  $\{[\hat{x}]_{\hat{p},n}\}_{\hat{P} \times \mathbb{N}} \longrightarrow [\{y_{p,n}\}_{P \times \mathbb{N}}]$  gilt. Zunächst ist jedoch nachzuweisen, dass  $\{y_{p,n}\}_{\mathbb{N} \times P} \subseteq X$  selbst ein Cauchynetz ist. Hierfür beachten wir

$$\begin{aligned} p(y_{p',n'} - y_{p'',n''}) &\leq p\left(y_{p',n'} - ([\hat{x}]_{\hat{p}',n'})_{\delta'}\right) \\ &\quad + p\left([\hat{x}]_{\hat{p}',n'}_{\delta'} - ([\hat{x}]_{\hat{p}'',n''})_{\delta''}\right) + p\left([\hat{x}]_{\hat{p}'',n''}_{\delta''} - y_{\hat{p}'',n''}\right) \end{aligned}$$

mit  $\delta', \delta'' \in P \times \mathbb{N}$ .

Sei zunächst  $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$ , dann folgt für die äußeren Summanden mit der Definition des kanonischen Repräsentanten und (B.7), dass

$$\begin{aligned} p\left(y_{p',n'} - ([\hat{x}]_{\hat{p}',n'})_{\delta'}\right) &< \frac{\epsilon}{3} \quad \text{und} \\ p\left([\hat{x}]_{\hat{p}'',n''}_{\delta''} - y_{\hat{p}'',n''}\right) &< \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned} \tag{B.8}$$

falls  $\delta', (p', n'), \delta'', (p'', n'') \geq (p, n)$ . Für den mittleren Summanden beachte man, dass per Definition

$$\lim_{\delta' \times \delta''} p\left([\hat{x}]_{\hat{p}',n'}_{\delta'} - [\hat{x}]_{\hat{p}'',n''}_{\delta''}\right) = \hat{p}\left([\hat{x}]_{\hat{p}',n'} - [\hat{x}]_{\hat{p}'',n''}\right) < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$$

für  $(\hat{p}', n'), (\hat{p}'', n'') \geq (\hat{p}, n)$  gilt. Wir finden dann  $\tilde{\delta}'$  und  $\tilde{\delta}''$  abhängig von  $(\hat{p}', n')$  und  $(\hat{p}'', n'')$  derart, dass

$$p\left((\hat{x}_{\hat{p}', n'})_{\delta'} - (\hat{x}_{\hat{p}'', n''})_{\delta''}\right) < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle  $\delta' \geq \tilde{\delta}', \delta'' \geq \tilde{\delta}''$ . Mit Definition B.2.1 i.) c.) finden wir  $\delta'_\epsilon \geq (n, p), \tilde{\delta}'$  sowie  $\delta''_\epsilon \geq (n, p), \tilde{\delta}''$ , so dass insgesamt

$$p(y_{p', n'} - y_{p'', n''}) < \epsilon \quad (\text{B.9})$$

gilt. Da wir gezeigt haben, dass dies für alle  $(p', n'), (p'', n'') \geq (n, p)$  erreichbar ist, folgt die Cauchy-eigenschaft.

Für die Konvergenz sei  $[\{y_{p', n'}\}]$  die Äquivalenzklasse der konstanten Folge  $\{y_{p', n'}\}$ , dann gilt:

$$\hat{p}\left([\{y_{p, n}\}_{P \times \mathbb{N}}] - [\hat{x}]_{\hat{p}', n'}\right) \leq \hat{p}\left([\{y_{p, n}\}_{P \times \mathbb{N}}] - [\{y_{p', n'}\}]\right) + \hat{p}\left([\{y_{p', n'}\}] - [\hat{x}]_{\hat{p}', n'}\right).$$

Für den ersten Summanden erhalten wir mit (B.9) und Proposition B.2.4 i.)

$$\hat{p}\left([\{y_{p, n}\}_{P \times \mathbb{N}}] - [\{y_{p', n'}\}]\right) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{falls} \quad (p', n') \geq (p, \tilde{n})$$

für  $\tilde{n}$  groß genug. Für den zweiten Summanden folgt mit der gleichen Argumentation angewandt auf (B.8)

$$\hat{p}\left([\{y_{p', n'}\}] - [\hat{x}]_{\hat{p}', n'}\right) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für} \quad (p', n') \geq (p, \tilde{n}'),$$

also insgesamt:

$$\hat{p}\left([\{y_{p, n}\}_{P \times \mathbb{N}}] - [\hat{x}]_{\hat{p}', n'}\right) < \epsilon \quad \text{für alle} \quad (p', n') \geq (p, \max(\tilde{n}, \tilde{n}')).$$

Das beweist die Vollständigkeit, und wir sind fertig. ■

### Satz B.2.6

Gegeben  $lkVR$ 's  $(X, P)$  und  $(Y, Q)$  und sei  $(Y, Q)$  zudem vollständig und hausdorffsch. Sei weiter  $f: \eta \rightarrow Y$  eine gleichmäßig stetige Abbildung von einer dichten Teilmenge  $\eta \subseteq X$  nach  $Y$ . Dann existiert eine eindeutig bestimmte, gleichmäßig stetige Abbildung  $\hat{f}: X \rightarrow Y$  mit der Eigenschaft  $\hat{f}|_\eta = f$ .

BEWEIS: Wir definieren:

$$\hat{f}(x) = \lim_{\alpha} f(x_\alpha) \quad \text{für ein Netz} \quad \eta \supseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x \in X.$$

Dann ist Existenz und Eindeutigkeit des Limes sowie die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl des Netzes nachzuweisen.

**Existenz:** Zunächst ist  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$  als konvergentes Netz insbesondere ein Cauchynetz. Mit der Vollständigkeit von  $Y$  reicht es dann zu zeigen, dass dies für  $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  ebenso der Fall ist. Sei hierfür  $q \in Q$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Dann finden wir mit der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  ein  $p \in P$  derart, dass für alle  $x_\alpha, x_\beta$ :

$$q(f(x_\alpha) - f(x_\beta)) < \epsilon \quad \text{falls} \quad p(x_\alpha - x_\beta) < \delta. \quad (\text{B.10})$$

Da  $p(x_\alpha - x_\beta) < \delta$  für  $\alpha, \beta \geq \gamma_\delta$  folgt daraus die Behauptung. Die Eindeutigkeit des Limes ist mit der Hausdorff-Eigenschaft von  $Y$  klar.

**Wohldefiniertheit:** Gegeben  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{y_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq \eta$  beide konvergent gegen  $x \in X$ , so erhalten wir mit der Stetigkeit von  $q \in Q$ :

$$\begin{aligned} q\left(\lim_\alpha f(x_\alpha) - \lim_\beta f(y_\beta)\right) &= q\left(\lim_\alpha \left[\lim_\beta [f(x_\alpha) - f(y_\beta)]\right]\right) = q\left(\lim_{\alpha \times \beta} [f(x_\alpha) - f(y_\beta)]\right) \\ &= \lim_{\alpha \times \beta} q(f(x_\alpha) - f(y_\beta)) = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus (B.10) und (B.2). Die zweite Gleichheit folgt mit Proposition B.2.4 ii.).

Für  $\hat{f}|_\eta = f$  sei  $\eta \supseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$  mit  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x \in \eta$ , dann folgt

$$\hat{f}(x) = \lim_\alpha f(x_\alpha) = f\left(\lim_\alpha x_\alpha\right) = f(x).$$

mit der Stetigkeit von  $f$  und der Hausdorff-Eigenschaft von  $Y$ , siehe auch Bemerkung B.2.2 ii.).

**Gleichmäßige Stetigkeit:** Es ist zu zeigen, dass für alle  $q \in Q$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben, ein  $p \in P$  und ein  $\delta > 0$  derart existieren, dass für alle  $x, y \in X$

$$q(\hat{f}(x) - \hat{f}(y)) < \epsilon \quad \text{falls} \quad p(x - y) < \delta$$

gilt. Zunächst haben wir nach Voraussetzung für  $\delta'$  vorgegeben, ein  $\epsilon'$ , so dass:

$$q(f(x) - f(y)) < \epsilon' < \epsilon \quad \text{falls} \quad p(x - y) < \delta < \delta'.$$

Sei  $p(x - y) < \delta$ , so folgt mit Dreiecksungleichung

$$p(x_\alpha - y_\beta) \leq p(x - y) + p(x - x_\alpha) + p(y - y_\beta) < \delta + \Delta < \delta'$$

für  $\alpha \geq \alpha_\Delta \in I, \beta \geq \beta_\Delta \in J$  mit Netzen  $\eta \supseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x$  und  $\eta \supseteq \{y_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow y$ . Wir erhalten dann mit der Stetigkeit von  $q$  und der Addition, dass

$$\begin{aligned} q(\hat{f}(x) - \hat{f}(y)) &= q\left(\lim_\alpha \left[\lim_\beta [f(x_\alpha) - f(y_\beta)]\right]\right) = q\left(\lim_{\alpha \times \beta} [f(x_\alpha) - f(y_\beta)]\right) \\ &= \lim_{\alpha \times \beta} q(f(x_\alpha) - f(y_\beta)) \leq \epsilon' < \epsilon, \end{aligned}$$



wobei wir abermals Proposition B.2.4 i.), ii.) und den Erhalt von  $\leq$  unter Limesbildung benutzt haben. Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit.

Die Eindeutigkeit besagter Abbildung folgt aus  $\bar{\eta} = X$ , denn für jede weitere derartige Abbildung  $\hat{f}'$  ist  $(\hat{f}' - \hat{f})|_{\eta} = 0$  und somit für  $\eta \supseteq \{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \rightarrow x \in X$

$$(\hat{f}' - \hat{f})(x) = \lim_{\alpha} (\hat{f}' - \hat{f})(x_{\alpha}) = 0$$

mit der Eindeutigkeit des Limes in  $Y$ . ■

### Bemerkung B.2.7

i.) Man beachte, dass wir als Voraussetzung nicht benötigt haben, dass  $(X, P)$  hausdorffsch ist. Das liegt daran, dass für stetiges  $f$  und  $x \neq x' \in X$  mit  $f(x) \neq f(x')$ , vermöge der Hausdorff-Eigenschaft von  $Y$ , disjunkte Umgebungen von  $f(x)$  und  $f(x')$  existieren, deren Urbilder disjunkte Umgebungen von  $x$  und  $x'$  sind.

Sprich, ein solches  $f$  kann sowieso nur dann stetig sein, wenn es untrennbare Punkte in  $X$  auf das selbe Element in  $Y$  abbildet.

ii.) Die besondere Wichtigkeit dieses Satzes liegt unter anderem darin, dass jede stetige, lineare Abbildung insbesondere gleichmäßig stetig ist. Für diese ist dann obiger Satz auch leichter mit  $q(\phi(x)) \leq c p(x)$  beweisbar.

Für stetige bilineare Abbildungen  $q(\phi(x, y)) \leq c p_1(x) p_2(y)$  und analog für stetige multilineare Abbildungen liefert folgender Satz sinngemäße Aussagen.

### Satz B.2.8

Gegeben lkVR's  $(X_1, P_1), (X_2, P_2)$  und  $(Y, Q)$  mit  $(Y, Q)$  zudem vollständig und hausdorffsch sowie dichte Teilmengen  $\eta_1 \subseteq X_1, \eta_2 \subseteq X_2$ . Sei weiter  $\phi : \eta_1 \times \eta_2 \rightarrow Y$  eine stetige, bilineare Abbildung, so existiert eine eindeutig bestimmte, stetige bilineare Abbildung:

$$\hat{\phi} : X_1 \times X_2 \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad \hat{\phi}|_{\eta_1 \times \eta_2} = \phi.$$

BEWEIS: Wir definieren  $\hat{\phi}(x, y) = \lim_{\alpha \times \beta} \overbrace{\phi(x_{\alpha}, y_{\beta})}^{\phi_{\alpha, \beta}}$  für Netze  $\eta_1 \supseteq \{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \rightarrow x$  und

$\eta_2 \supseteq \{y_{\beta}\}_{\beta \in J} \rightarrow y$ . Besagter Limes ist dann mit der Hausdorff-Eigenschaft von  $Y$  eindeutig.

**Existenz:** Sei  $p \in P$  vorgegeben. Dann ist  $p(\phi(x, y)) \leq c p_1(x) p_2(y)$  für alle  $x \in X_1$  und alle  $y \in X_2$ . Weiterhin beachten wir, dass  $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  und  $\{y_{\beta}\}_{\beta \in J}$  insbesondere Cauchy-netze sind. Wir finden dann Konstanten  $c', c''$  sowie Elemente  $\alpha_{c''} \in I$  und  $\beta_{c'} \in J$  derart, dass  $p_1(x_{\alpha}) \leq c''$  für alle  $\alpha \geq \alpha_{c''}$  und  $p_2(y_{\beta}) \leq c'$  für alle  $\beta \geq \beta_{c'}$ . Des Weiteren existieren  $\alpha_{\frac{\epsilon}{2cc''}} \in I$  und  $\beta_{\frac{\epsilon}{2cc'}} \in J$ , so dass  $p_1(x_{\alpha} - x_{\alpha'}) \leq \frac{\epsilon}{2cc''}$  für alle  $\alpha, \alpha' \geq \alpha_{\frac{\epsilon}{2cc''}}$

und  $p_2(y_\beta - y_{\beta'}) \leq \frac{\epsilon}{2cc'}$  für alle  $\beta, \beta' \geq \beta_{\frac{\epsilon}{2cc'}}$  gilt. Wir wählen  $\tilde{\alpha} \geq \alpha_{c''}, \alpha_{\frac{\epsilon}{2cc''}}$  sowie  $\tilde{\beta} \geq \beta_{c'}, \beta_{\frac{\epsilon}{2cc'}}$  und erhalten:

$$\begin{aligned} q(\phi_{\alpha, \beta} - \phi_{\alpha', \beta'}) &\leq q(\phi(x_\alpha, y_\beta - y_{\beta'})) + q(\phi(x_\alpha - x_{\alpha'}, y_{\beta'})) \\ &\leq c p_1(x_\alpha) p_2(y_\beta - y_{\beta'}) + c p_1(x_\alpha - x_{\alpha'}) p_2(y_{\beta'}) \\ &\leq cc' p_2(y_\beta - y_{\beta'}) + cc'' p_1(x_\alpha - x_{\alpha'}) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

für alle  $\alpha, \alpha' \geq \tilde{\alpha}$  und  $\beta, \beta' \geq \tilde{\beta}$ . Die Wohldefiniertheit folgt mit (B.2) auf die gleiche Weise, und für die Stetigkeit rechnen wir mit Proposition B.2.4 ii.) und dem Erhalt von  $\leq$  unter Limesbildung:

$$\begin{aligned} q(\hat{\phi}(x, y)) &= \lim_{\alpha \times \beta} q(\phi(x_\alpha, y_\beta)) \leq \lim_{\alpha \times \beta} c p_1(x_\alpha) p_2(y_\beta) \\ &= c \lim_{\alpha} p_1(x_\alpha) \lim_{\beta} p_2(y_\beta) = c p_1(x) p_2(y). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von  $\hat{\phi}$  folgt wie in Satz B.2.6, ebenso die Behauptung  $\hat{\phi}|_{\eta_1 \times \eta_2} = \phi$ , da mit  $\eta_1 \supseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \rightarrow x \in X_1$  und  $\eta_2 \supseteq \{y_\beta\}_{\beta \in J} \rightarrow y \in X_2$  das Netz  $\{(x_\alpha, y_\beta)\}_{I \times J}$  in der Produkttopologie von  $X_1 \times X_2$  gegen  $(x, y)$  konvergiert. Alternativ kann man hier auch wieder Proposition B.2.4 ii.) benutzen. ■

### B.3. Tensorprodukte lokalkonvexer Vektorräume und deren Topologien

Zu Beginn dieses Abschnittes erinnern wir zunächst an folgende wohlbekannte Tatsachen.

#### Satz B.3.1 (Hahn-Banach, vgl. [HS91], Kapitel 2.6)

Gegeben ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$  und eine Halbnorm  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei des Weiteren  $f: L \rightarrow \mathbb{K}$  eine lineare Abbildung von einem Unterraum  $L \subseteq X$  nach  $\mathbb{K}$  und es gelte  $|f| \leq p|_L$ . Dann existiert eine lineare Abbildung  $F: X \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $|F| \leq p$  und  $F|_L = f$ .

#### Definition B.3.2 (Universelle Eigenschaft)

Gegeben  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$ , so heißt ein Tupel  $(\otimes_k, \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k)$ , bestehend aus einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  und einer  $\mathbb{K}$ -multilinearen Abbildung  $\otimes_k: \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  genau dann ein Tensorprodukt von  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$ , wenn für jedes weitere derartige Tupel  $(\phi, \mathbb{M})$  eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\tau: \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{M}$  existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k & \xrightarrow{\otimes_k} & \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k \\ & \searrow \phi & \downarrow \tau \\ & & \mathbb{M} \end{array}$$

Mit  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$  bezeichnen wir im Folgenden das Bild von  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k$  unter der Abbildung  $\otimes_k$ .

**Lemma B.3.3 (Isomorphie und Assoziativität des Tensorproduktes)**

i.) Je zwei Tensorprodukte  $(\otimes_k, \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k)$  und  $(\otimes'_k, \mathbb{V}_1 \otimes' \dots \otimes' \mathbb{V}_k)$  von  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$  sind isomorph.

ii.) Gegeben  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ , dann gilt  $(\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2) \otimes \mathbb{V}_3 \cong \mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3$  vermöge linearer Fortsetzung von:

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3 &\longrightarrow (\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2) \otimes \mathbb{V}_3 \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 &\longmapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{aligned}$$

Allgemein ist  $(\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_l) \otimes (\mathbb{V}_{l+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k) \cong \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  vermöge linearer Fortsetzung von  $\mu: v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto (v_1 \otimes \dots \otimes v_l) \otimes (v_{l+1} \otimes \dots \otimes v_k)$ .

BEWEIS: i.) Mit der universellen Eigenschaft beider Tensorprodukte folgt die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k & \xrightarrow{\otimes_k} & \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k \\ & \searrow \otimes'_k & \downarrow \tau_{\otimes'_k} \uparrow \tau_{\otimes_k} \\ & & \mathbb{V}_1 \otimes' \dots \otimes' \mathbb{V}_k \end{array}$$

mit eindeutig bestimmten linearen Abbildungen  $\tau_{\otimes'_k}$  und  $\tau_{\otimes_k}$ . Für diese gilt sowohl  $\tau_{\otimes'_k} \circ \tau_{\otimes_k} = \text{id}_{\mathbb{V}_1 \otimes' \dots \otimes' \mathbb{V}_k}$  als auch  $\tau_{\otimes_k} \circ \tau_{\otimes'_k} = \text{id}_{\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k}$ , da beide Identitäten die eindeutig bestimmten Isomorphismen sind, die

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k & \xrightarrow{\otimes'_k} & \mathbb{V}_1 \otimes' \dots \otimes' \mathbb{V}_k \\ & \searrow \otimes'_k & \downarrow \text{id}_{\mathbb{V}_1 \otimes' \dots \otimes' \mathbb{V}_k} \\ & & \mathbb{V}_1 \otimes' \dots \otimes' \mathbb{V}_k \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k & \xrightarrow{\otimes_k} & \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k \\ & \searrow \otimes_k & \downarrow \text{id}_{\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k} \\ & & \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k \end{array}$$

zum Kommutieren bringen. Insgesamt zeigt dies, dass  $\tau_{\otimes_k}$  und  $\tau_{\otimes'_k}$  zueinander inverse Isomorphismen sind.

ii.) Nach i.) reicht es zu zeigen, dass  $(\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2) \otimes \mathbb{V}_3$  ein Tensorprodukt von  $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$  ist. Denn es ist  $(\tau \circ \otimes_3)(v_1, v_2, v_3) = \otimes_1(\otimes_2(v_1, v_2), v_3)$  und somit der gesuchte Isomorphismus die eindeutig bestimmte lineare Fortsetzung von  $\tau$ . Sei hierfür  $\phi: \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{M}$  trilinear, so definieren wir für festes  $v_3 \in \mathbb{V}_3$  die bilineare Abbildung  $\tau_{v_3}: \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \longrightarrow \mathbb{M}$  durch  $\tau_{v_3}(v_1, v_2) = \phi(v_1, v_2, v_3)$ . Mit der universellen Eigenschaft existiert dann ein eindeutig bestimmtes, lineares

$\tau_{v_3}^\otimes: \mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \longrightarrow \mathbb{M}$  mit  $\tau_{v_3}^\otimes(v_1 \otimes v_2) = \tau_{v_3}(v_1, v_2) = \phi(v_1, v_2, v_3)$ . Wir behaupten nun, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}: (\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2) \times \mathbb{V}_3 &\longrightarrow \mathbb{M} \\ (z, v_3) &\longmapsto \tau_{v_3}^\otimes(z) \end{aligned}$$

bilinear ist. Die Linearität im ersten Argument ist klar und die Linearität im zweiten Argument erhalten wir für  $z \in \mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$ ,  $v, w \in \mathbb{V}_3$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  mit:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(z, \lambda v + w) &= \sum_{i=1}^n \tilde{\tau}(v_1^i \otimes v_2^i, \lambda v + w) = \sum_{i=1}^n \tau_{\lambda v + w}^\otimes(v_1^i \otimes v_2^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \phi(v_1^i, v_2^i, \lambda v + w) = \lambda \sum_{i=1}^n \phi(v_1^i, v_2^i, v) + \sum_{i=1}^n \phi(v_1^i, v_2^i, w) \\ &= \lambda \tilde{\tau}(z, v) + \tilde{\tau}(z, w). \end{aligned}$$

Somit existiert ein eindeutig bestimmtes  $\hat{\tau}: (\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2) \otimes \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{M}$  mit

$$\hat{\tau}((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = \tilde{\tau}((v_1 \otimes v_2), v_3) = \tau_{v_3}^\otimes(v_1 \otimes v_2) = \phi(v_1, v_2, v_3)$$

für alle  $v_1 \in \mathbb{V}_1, v_2 \in \mathbb{V}_2$  und  $v_3 \in \mathbb{V}_3$ , wie gewünscht. Die allgemeine Aussage zeigt man auf analoge Weise. ■

### Bemerkung B.3.4

Man kann zeigen, dass,  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$  vorgegeben, mindestens immer ein solches Tensorprodukt existiert. Eine äquivalente und im Einzelfall praktischere Definition (besonders wenn es darum geht, die Tensorprodukteigenschaft eines solchen Tupels nachzuweisen) erhält man wie folgt:

Gegeben  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$ , so heißt ein Tupel  $(\otimes_k, \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k)$  bestehend aus einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  und einer  $\mathbb{K}$ -multilinearen Abbildung  $\otimes_k: \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k \longrightarrow \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  genau dann ein Tensorprodukt von  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$ , wenn:

$$i.) \quad \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k = \text{span}(\text{im}(\otimes_k)).$$

ii.) Sind  $\{v_{i_j}^j\}_{1 \leq i_j \leq n_j} \subseteq \mathbb{V}_j$  linear unabhängig in den  $\mathbb{V}_j$  für alle  $1 \leq j \leq k$ , so ist die Menge  $\{\otimes_k(v_{i_1}^1, \dots, v_{i_k}^k)\}_{\substack{1 \leq i_j \leq n_j \\ 1 \leq j \leq k}} \subseteq \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  ebenfalls linear unabhängig.

Grob gesagt entspricht dabei i.) der Eindeutigkeit der Abbildung  $\tau$  und ii.) sichert deren Existenz. Die Aussage von i.) und ii.) ist dabei im Wesentlichen die, dass die Menge aller Elemente  $e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k = \otimes_k(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$  für Basen  $\{e_{i_j}^j\}_{i_j \in I_j}$  der  $\mathbb{V}_j$  ein Basis von  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  ist.

Im Gegensatz zur Charakterisierung des Tensorproduktes in Bemerkung B.3.4, legt uns die Definition über die universelle Eigenschaft eine ausgesprochen praktische Möglichkeit in die Hand, lineare Abbildungen von Tensorprodukten in andere  $\mathbb{K}$ -Vektorräume zu definieren:

**Korollar B.3.5**

Gegeben  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k, \mathbb{M}$  und ein Tensorprodukt  $(\otimes_k, \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k)$  von  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$ , so liefert jede Abbildungsvorschrift  $\phi: \text{im}(\otimes_k) \rightarrow \mathbb{M}$ , die

$$\begin{aligned} \phi(v_1 \otimes \dots \otimes v_i + \lambda v'_i \otimes \dots \otimes v_k) &= \phi(v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_k) \\ &\quad + \lambda \phi(v_1 \otimes \dots \otimes v'_i \otimes \dots \otimes v_k) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

für  $1 \leq i \leq k$  und alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  erfüllt, eine eindeutig bestimmte, wohldefinierte lineare Fortsetzung  $\phi_{\otimes_k}$  auf ganz  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$ .

BEWEIS:  $\phi$  definiert eine eindeutige  $\mathbb{K}$ -multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_{\times}: \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k &\longrightarrow \mathbb{M} \\ (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto \phi(\otimes_k(v_1, \dots, v_k)), \end{aligned}$$

und mit der universellen Eigenschaft existiert somit eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\phi_{\otimes_k}: \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{M}$  derart, dass  $\phi_{\otimes_k} \circ \otimes_k = \phi_{\times} = \phi \circ \otimes_k$ , also  $\phi_{\otimes_k}|_{\text{im}(\otimes_k)} = \phi$  gilt. ■

**Definition B.3.6 ( $\pi_k$ -Topologie)**

Gegeben lkVR's  $(\mathbb{V}_1, P_1), \dots, (\mathbb{V}_k, P_k)$  und ein Tensorprodukt  $(\otimes_k, \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k)$  von  $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_k$ , so ist eine  $\pi_k$ -Topologie auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  eine Topologie derart, dass jede lineare Abbildung

$$\tau: \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k \longrightarrow \mathbb{M}$$

in einen weiteren lokalkonvexen Vektorraum  $(\mathbb{M}, Q)$  genau dann stetig ist, wenn die Abbildung  $\tau \circ \otimes_k$  bezüglich der Produkttopologie auf  $\mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k$  stetig ist. Hierbei bezeichnet  $\mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k$  den topologischen Raum  $(\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k, \pi_k)$ .

**Satz B.3.7**

Gegeben lkVR's  $(\mathbb{V}_1, P_1), \dots, (\mathbb{V}_k, P_k)$ , so gilt:

- i.) Es ist  $\otimes_k$  stetig in jeder  $\pi_k$ -Topologie auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$ .
- ii.) Sofern sie existiert, ist die  $\pi_k$ -Topologie auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  eindeutig bestimmt.
- iii.) Die  $\pi_k$ -Topologie auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  existiert, ist lokalkonvex und wird induziert durch das Halbnormensystem  $\Pi_{\mathbf{P}}$ , ( $\mathbf{P} = P_1 \times \dots \times P_k$ ):

$$\pi_{\mathbf{P}}(z) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i) \right\} \quad \mathbf{P} \ni \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k).$$

Dabei ist das Infimum über alle Zerlegungen  $z = \sum_{i=1}^n x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i$  zu nehmen.

Für separables  $z = x_1 \otimes \dots \otimes x_k$  folgt

$$\pi_{\mathbf{p}}(z) = p_1(x_1) \dots p_k(x_k). \quad (\text{B.12})$$

Die Halbnorm  $\pi_{\mathbf{p}}$  heißt Tensorprodukt der Halbnormen  $p_1, \dots, p_k$  und man schreibt oft auch einfach  $p_1 \otimes \dots \otimes p_k$  anstelle  $\pi_{\mathbf{p}}$ .

iv.)  $\pi_k$  ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$ , bezüglich der die Abbildung  $\otimes_k$  stetig ist.

v.)  $(\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k, \pi_k)$  ist genau dann hausdorffsch, wenn alle  $(\mathbb{V}_j, P_j)$  hausdorffsch sind.

vi.) Sind  $P_1, \dots, P_k$  filtrierend, so auch  $\prod_{\mathbf{p}}$ .

vii.) Sind alle  $(\mathbb{V}_j, P_j)$  hausdorffsch, so gilt

$$\widehat{\mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k} \cong \widehat{\hat{\mathbb{V}}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \hat{\mathbb{V}}_k}.$$

Dabei bedeutet  $\cong$  lineare Homöomorphie.

Wir dürfen somit  $\hat{\mathbb{V}}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \hat{\mathbb{V}}_k$  als dichte Teilmenge von  $\widehat{\mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k}$  auffassen.

BEWEIS: Die Beweise von (B.12) und v.) finden sich auch in [Tre67, Kapitel 43] bzw. [Jar81, Kapitel 15].

i.) Mit Definition B.3.6 und der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k & \xrightarrow{\otimes_k} & \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k \\ & \searrow \otimes_k & \downarrow \text{id} \\ & & \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k, \end{array}$$

ist  $\text{id} \circ \otimes_k = \otimes_k$  genau dann stetig, wenn  $\text{id}$  stetig ist. Das ist aber klar, da beide Räume dieselbe Topologie tragen.

ii.) Wir haben

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k & \xrightarrow{\otimes_k} & \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k \\ & \searrow \otimes_k & \downarrow \text{id} \\ & & \mathbb{V}_1 \otimes_{\hat{\pi}} \dots \otimes_{\hat{\pi}} \mathbb{V}_k, \end{array}$$

und die Stetigkeit von  $\otimes_k$  nach i). Vermöge  $\text{id} \circ \otimes_k = \otimes_k$  ist auch  $\text{id} \circ \otimes_k$  stetig und mit Definition B.3.6  $\text{id}$  selbst. Das zeigt  $\pi = \hat{\pi}$  und somit die Behauptung.

iii.) Zunächst sind die  $\pi_{\mathbf{p}}$  in der Tat Halbnormen, denn es ist:

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{p}}(\lambda z) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda| p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i) \right\} \\ &= |\lambda| \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i) \right\} = |\lambda| \pi_{\mathbf{p}}(z).\end{aligned}$$

Weiterhin gibt mindestens so viele Zerlegungen von  $\tilde{z} = z + z'$ , wie man durch Addition von Zerlegungen von  $z$  und  $z'$  erhält. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{p}}(z + z') &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\tilde{n}} p_1(\tilde{x}_1^i) \dots p_k(\tilde{x}_k^i) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i) + \sum_{i=1}^{n'} p_1(x_1'^i) \dots p_k(x_k'^i) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i) \right\} + \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n'} p_1(x_1'^i) \dots p_k(x_k'^i) \right\} \\ &= \pi_{\mathbf{p}}(z) + \pi_{\mathbf{p}}(z').\end{aligned}$$

Mit Satz B.1.4 erzeugt dieses Halbnormensystem eine lokalkonvexe Topologie auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$ , die diesen Raum zu einem topologischen Vektorraum macht.

Für (B.12) sei  $z = x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ , dann ist  $\pi_{\mathbf{p}}(z) \leq p_1(x_1) \dots p_k(x_k)$  per Definition. Für die umgekehrte Abschätzung definieren wir lineare Abbildungen  $u_j$  auf den Unterräumen  $L_j = \text{span}(x_j) \subseteq \mathbb{V}_j$  durch  $u_j(\lambda x_j) = \lambda p_j(x_j)$ .

Dies bedeutet  $|u_j| \leq p_j|_{L_j}$  und mit Satz B.3.1 finden wir Fortsetzungen  $|U_j| \leq p_j$  mit  $U_j|_{L_j} = u_j$ . Es folgt für die durch

$$\begin{aligned}U_1 \otimes \dots \otimes U_k: \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_1 \otimes \dots \otimes x_k &\longmapsto U_1(x_1) \cdot \dots \cdot U_k(x_k),\end{aligned}$$

nach Korollar B.3.5, wohldefinierte lineare Abbildung, dass

$$\begin{aligned}p_1(x_1) \dots p_k(x_k) &= |U_1(x_1) \cdot \dots \cdot U_k(x_k)| = |U_1 \otimes \dots \otimes U_k|(z) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |U_1 \otimes \dots \otimes U_k|(y_1^i \otimes \dots \otimes y_k^i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n p_1(y_1^i) \dots p_k(y_k^i)\end{aligned}$$

für alle Zerlegungen  $z = \sum_{i=1}^n y_1^i \otimes \dots \otimes y_k^i$  gilt. Dies zeigt

$$p_1(x_1) \dots p_k(x_k) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p_1(y_1^i) \dots p_k(y_k^i) \right\} = \pi_{\mathbf{p}}(z)$$

und somit (B.12).

Es bleibt nachzuweisen, dass  $(\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k, \pi_{\mathbf{p}})$  Definition B.3.6 erfüllt. Sei hierfür  $(\mathbb{M}, Q)$  lokalkonvex und  $P_1, \dots, P_k, Q$  filtrierend gewählt. Sei weiter

$$\tau: \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k \longrightarrow \mathbb{M}$$

linear und stetig. Dann folgt mit Satz B.1.7 für jede Halbnorm  $q \in Q$ , dass

$$q(\tau(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)) \leq c \pi_{\mathbf{p}}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) \stackrel{(B.12)}{=} c p_1(x_1) \dots p_k(x_k)$$

für eine besagter Halbnormen  $\pi_{\mathbf{p}} \in \Pi_{\mathbf{p}}$  gilt. Hierbei haben wir *vi.*) benutzt. Dies ist nach selbigem Satz das Stetigkeitskriterium für die  $\mathbb{K}$ -multilineare Abbildung  $\tau \circ \otimes_k: \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_k \longrightarrow \mathbb{M}$ , was diese Richtung zeigt.

Für die umgekehrte Implikation sei  $\tau \circ \otimes_k$  stetig, dann folgt zunächst für separable Elemente

$$q(\tau(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)) = q((\tau \circ \otimes_k)(x_1, \dots, x_k)) \leq c p_1(x_1) \dots p_k(x_k)$$

und somit für  $z \in \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  beliebig, dass

$$q(\tau(z)) \leq \sum_{i=1}^n q(\tau(x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i)) \leq c \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i)$$

für alle Zerlegungen von  $z$ . Dies zeigt

$$q(\tau(z)) \leq c \inf \left\{ \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i) \right\} = c \pi_{\mathbf{p}}(z)$$

und somit die Stetigkeit von  $\tau$ .

*iv.)* Angenommen es gäbe eine feinere lokalkonvexe Topologie  $\mathcal{T}_{\tilde{P}}$  auf  $\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$ , bezüglich derer  $\otimes_k$  stetig ist. Dann gäbe es ein  $\tilde{p} \in \tilde{P}$ , welches durch keine bezüglich  $\pi_k$  stetige Halbnorm abschätzbar wäre, siehe Korollar B.1.5 *ii.*).

Aus der Stetigkeit von  $\otimes_k$  folgt aber  $\tilde{p}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) \leq c p_1(x_1) \dots p_k(x_k)$ , mithin  $\tilde{p}(z) \leq c \sum_{i=1}^n p_1(x_1^i) \dots p_k(x_k^i)$  für alle Zerlegungen von  $z \in \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$ . Das zeigt  $\tilde{p} \leq c \pi_{\mathbf{p}}$  im Widerspruch zur Annahme.



v.) Ist  $(\mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k, \pi_k)$  hausdorffsch, so ist  $\Pi_{\mathbf{P}}$  separierend und somit auch jedes  $P_j$ . Hiermit sind alle  $(\mathbb{V}_j, P_j)$  hausdorffsch.

Für die umgekehrte Richtung reicht es, die Separationseigenschaft für  $\Pi_{\mathbf{P}}$  nachzuweisen. Sei hierfür  $z = \sum_{i=1}^n x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i$  eine Zerlegung von  $z \in \mathbb{V}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_k$  derart, dass die  $\{x_j^i\}_{1 \leq i \leq n}$  für jedes  $1 \leq j \leq k$  linear unabhängig sind. Wir betrachten die endlichdimensionalen Unterräume  $L_j = \text{span}(x_j^1, \dots, x_j^n)$  und die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} u_j: L_j &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_j^i &\longmapsto \delta_{1,i}. \end{aligned}$$

Da die  $\mathbb{V}_j$  hausdorffsch sind, finden wir Halbnormen  $p_j \in P_j$  derart, dass die Einschränkungen  $p_j|_{L_j}$  echte Normen sind. Auf endlichdimensionalen normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen sind alle linearen Abbildungen in die komplexen Zahlen stetig und es folgt  $|u_j| \leq c_j p_j(u_j)$  auf dem Unterraum  $L_j$ .

Mit dem Satz von Hahn-Banach erhalten wir lineare Abbildungen  $U_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{K}$  derart, dass  $U_j|_{L_j} = u_j$  und  $|U_j| \leq c_j p_j$  auf ganz  $\mathbb{V}_j$ .

Für die lineare Abbildung  $U_1 \otimes \dots \otimes U_k$  folgt

$$|U_1 \otimes \dots \otimes U_k|(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = |U_1(x_1) \dots U_k(x_k)| \leq \left[ \prod_{j=1}^k c_j \right] p_1(x_1) \dots p_k(x_k)$$

und somit  $|U_1 \otimes \dots \otimes U_k| \leq c \pi_{\mathbf{P}}$  mit  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ . Nun gilt per Konstruktion, dass  $|U_1 \otimes \dots \otimes U_k|(z) = 1$ , also folgt insgesamt

$$\pi_{\mathbf{P}}(z) \geq \frac{1}{c} |U_1 \otimes \dots \otimes U_k|(z) = \frac{1}{c} > 0$$

und somit die Behauptung.

vi.) Sind  $P_1, \dots, P_k$  filtrierend und  $p_1 \otimes \dots \otimes p_k, p'_1 \otimes \dots \otimes p'_k \in \Pi_{\mathbf{P}}$ . Dann finden wir  $q_j \in P_j$  mit  $q_j \geq p_j, p'_j$  für alle  $1 \leq j \leq k$ . Dann zeigt (B.12), dass

$$\begin{aligned} p_1 \otimes \dots \otimes p_k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) &\leq q_1 \otimes \dots \otimes q_k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) \quad \text{sowie} \\ p'_1 \otimes \dots \otimes p'_k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) &\leq q_1 \otimes \dots \otimes q_k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) \end{aligned}$$

für alle separablen  $x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k$ . Hiermit folgt für  $z \in \mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} \mathbb{V}_k$  beliebig, dass

$$\begin{aligned} p_1 \otimes \dots \otimes p_k(z) &\leq \sum_{i=1}^n p_1 \otimes \dots \otimes p_k(x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n q_1 \otimes \dots \otimes q_k(x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i) \end{aligned}$$

für alle Zerlegungen  $z = \sum_{i=1}^n x_1^i \otimes \dots \otimes x_k^i$ . Dies zeigt

$$p_1 \otimes \dots \otimes p_k(z) \leq q_1 \otimes \dots \otimes q_k(z)$$

und analog folgt  $p'_1 \otimes \dots \otimes p'_k(z) \leq q_1 \otimes \dots \otimes q_k(z)$ .

vii.) Sind alle  $(V_j, P_j)$  hausdorffsch, so mit v.) auch  $V_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi V_k$  und dessen Vervollständigung existiert. Angenommen wir hätten die Aussage für  $k - 1$  bereits gezeigt, so folgte

$$\begin{aligned} V_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi V_k &= \left[ (V_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi V_{k-1}) \otimes_\pi V_k \right] = \left[ (V_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi V_{k-1}) \otimes_\pi \hat{V}_k \right] \\ &= \left[ (\hat{V}_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi \hat{V}_{k-1}) \otimes_\pi \hat{V}_k \right] = \widehat{V_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi V_k}, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheitszeichen lineare Homöomorphien bedeuten. In der Tat sind  $V_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi V_k$  und  $(V_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi V_{k-1}) \otimes_\pi V_k$  als  $\mathbb{K}$ -Vektorräume nach Lemma B.3.3 isomorph. Sei  $\cong$  besagter Isomorphismus in der ersten Gleichheit, dann folgt diese mit

$$\begin{aligned} \pi_{p_1, \dots, p_{k-1}} \otimes p_k (\cong (x_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi x_k)) &= \pi_{p_1, \dots, p_{k-1}} \otimes p_k ((x_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi x_{k-1}) \otimes_\pi x_k) \\ &= \pi_{p_1, \dots, p_k}(x_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi x_k), \end{aligned}$$

da dann  $\cong$  eine Isometrie mit der offensichtlichen Zuordnung der Halbnormen ist und somit Satz B.2.5 die Homöomorphie beider Vervollständigungen zeigt. Die zweite und dritte die Gleichheit liefert die Induktionsvoraussetzung und die letzte folgt wie die erste.

Um die Behauptung für  $k = 2$  zu zeigen, reicht es nach Satz B.2.5 die Existenz einer Isometrie

$$i : V_1 \otimes_\pi V_2 \longrightarrow \widehat{V_1 \otimes_\pi V_2}$$

mit  $\overline{i(V_1 \otimes_\pi V_2)} = \widehat{V_1 \otimes_\pi V_2}$  nachzuweisen. Hierfür definieren wir

$$\begin{aligned} j_X : V_1 \otimes_\pi V_2 &\longrightarrow \hat{V}_1 \otimes_\pi \hat{V}_2 \\ x \otimes_\pi y &\longmapsto [\{x\}] \otimes_\pi [\{y\}] \end{aligned}$$

durch Korollar B.3.5 mit  $[\{x\}]$  die Äquivalenzklasse der konstanten Folge  $\{x, x, x, \dots\}$  und setzen

$$\begin{aligned} i_X : z &\longmapsto [\{j_X(z)\}] \\ i_P : p_1 \otimes p_2 &\longmapsto \widehat{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2}. \end{aligned}$$

Für die Isometrieeigenschaft rechnen wir mit  $z \in V_1 \otimes_\pi V_2$ :

$$\widehat{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2}([\{j_X(z)\}]) = \hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2(j_X(z)) = \inf \left( \sum_i \hat{p}_1([\{x^i\}]) \hat{p}_2([\{y^i\}]) \right)$$

$$= \inf \left( \sum_i p_1(x^i) p_2(y^i) \right) = p_1 \otimes p_2(z).$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\overline{i(\mathbb{V}_1 \otimes_\pi \mathbb{V}_2)} = \widehat{\widehat{\mathbb{V}_1} \otimes_\pi \widehat{\mathbb{V}_2}}$  gilt. Dabei ist per Definition des topologischen Abschlusses bereits klar, dass  $\overline{i(\mathbb{V}_1 \otimes_\pi \mathbb{V}_2)} \subseteq \widehat{\widehat{\mathbb{V}_1} \otimes_\pi \widehat{\mathbb{V}_2}}$  ist.

Für die umgekehrte Inklusion sei  $z = [\{z_\alpha\}_{\alpha \in I}] \in \widehat{\widehat{\mathbb{V}_1} \otimes_\pi \widehat{\mathbb{V}_2}}$  und wir müssen nachweisen, dass  $B_{\widehat{\hat{p}_1} \otimes \hat{p}_2, \epsilon}(z) \cap i(\mathbb{V}_1 \otimes_\pi \mathbb{V}_2) \neq \emptyset$  für jeden solchen Ball um  $z$  erfüllt ist. Nun finden wir für  $\epsilon - \Delta > 0$  mit  $\Delta > 0$  ein  $\alpha_{\frac{\epsilon}{3}} \in I$  derart, dass

$$\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2(z_\alpha - z_\beta) < \frac{\epsilon - \Delta}{3} \quad \forall \alpha, \beta \geq \alpha_{\frac{\epsilon}{3}} \in I,$$

womit

$$\widehat{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2}([\{z_\alpha\}_{\alpha \in I}] - [\{z_{\alpha'}\}]) \leq \frac{\epsilon - \Delta}{3} < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall \alpha' \geq \alpha_{\frac{\epsilon}{3}} \in I.$$

Nun ist  $z_{\alpha'} \in \widehat{\mathbb{V}_1} \otimes_\pi \widehat{\mathbb{V}_2}$ , also  $z_{\alpha'} = \sum_{i=1}^n [\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}] \otimes_\pi [\{y_{\beta_i}^i\}_{\beta_i \in J'_i}]$  und folglich

$$\begin{aligned} p_1(x_\gamma^i - x_\delta^i) &< \frac{\epsilon - \Delta}{\hat{p}_2([\{y_{\beta_i}^i\}_{\beta_i \in J'_i}]) 3n} \quad \forall \gamma, \delta \geq \alpha'_i \in J_i \\ p_2(y_\gamma^i - y_\delta^i) &< \frac{\epsilon - \Delta}{\hat{p}_1([\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}]) 3n} \quad \forall \gamma, \delta \geq \beta'_i \in J'_i, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \hat{p}_1([\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}] - [\{x_{\alpha'_i}^i\}]) &< \frac{\epsilon}{\hat{p}_2([\{y_{\beta_i}^i\}_{\beta_i \in J'_i}]) 3n} \\ \hat{p}_2([\{y_{\beta_i}^i\}_{\beta_i \in J'_i}] - [\{y_{\beta'_i}^i\}]) &< \frac{\epsilon}{\hat{p}_1([\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}]) 3n}. \end{aligned}$$

Dann ist  $\tau = \sum_{i=1}^n x_{\alpha'_i}^i \otimes_\pi y_{\beta'_i}^i \in \mathbb{V}_1 \otimes_\pi \mathbb{V}_2$  mit  $i(\tau) = \left[ \left\{ \sum_{i=1}^n [\{x_{\alpha'_i}^i\}] \otimes_\pi [\{y_{\beta'_i}^i\}] \right\} \right]$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \widehat{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2}(z - i(\tau)) &\leq \widehat{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2}(z - [\{z_{\alpha'}\}]) \\ &\quad + \widehat{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2}([\{z_{\alpha'}\}] - \left[ \left\{ \sum_{i=1}^n [\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}] \otimes_\pi [\{y_{\beta'_i}^i\}] \right\} \right]) \\ &\quad + \widehat{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2}(\left[ \left\{ \sum_{i=1}^n [\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}] \otimes_\pi [\{y_{\beta'_i}^i\}] \right\} \right] - i(\tau)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{\epsilon}{3} + \hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2 \left( \sum_{i=1}^n [\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}] \otimes_{\pi} [\{y_{\beta_i}^i\}_{\beta_i \in J'_i} - \{y_{\beta'_i}^i\}] \right) \\
 &\quad + \hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2 \left( \sum_{i=1}^n [\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i} - \{x_{\alpha'_i}^i\}] \otimes_{\pi} [\{y_{\beta'_i}^i\}] \right) \\
 &< \frac{\epsilon}{3} + \sum_{i=1}^n \hat{p}_1([\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}]) \frac{\epsilon}{\hat{p}_1([\{x_{\alpha_i}^i\}_{\alpha_i \in J_i}]) 3n} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{\hat{p}_2([\{y_{\beta_i}^i\}_{\beta_i \in J'_i}])} \hat{p}_2([\{y_{\beta'_i}^i\}]) \\
 &= \epsilon,
 \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichheit die Halbnormeigenschaft von  $\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2$  benutzt haben. Dies zeigt  $i(\tau) \in \widehat{B_{\hat{p}_1 \otimes \hat{p}_2, \epsilon}}(z) \cap i(\mathbb{V}_1 \otimes_{\pi} \mathbb{V}_2) \neq \emptyset$  und somit die Behauptung. ■

# Literaturverzeichnis

- [BB93] Ph. Blanchard and E. Brüning. *Distributionen und Hilbertraumoperatoren*. Springer-Verlag, Wien, New York, 1993.
- [BFF<sup>+</sup>78] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. *Ann. Phys.*, 111:61–151, 1978.
- [BGH<sup>+</sup>03] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H.-C. Herbig, and S. Waldmann. Star-représentations sur des sous-variétés coïsotropes. *Preprint*, math.QA/0309321:35 pages, 2003.
- [BGP07] C. Bär, N. Ginoux, and F. Pfäffle. *Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007.
- [CE99] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1999. Thirteenth printing, originally published in 1956.
- [CGD80] M. Cahen, S. Gutt, and M. DeWilde. Local cohomology of the algebra of  $c^\infty$  functions on a connected manifold. *Lett. Math. Phys.*, 4:157–167, 1980.
- [Con94] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, New York, London, 1994.
- [Dei09] Oliver Deiser. *Einführung in die Mengenlehre*. Springer, Berlin, third edition, 2009.
- [DF01] M. Dütsch and K. Fredenhagen. Algebraic quantum field theory, perturbation theory, and the loop expansion. *Commun. Math. Phys.*, 219:5–30, 2001.
- [DF03] M. Dütsch and K. Fredenhagen. The master ward identity and generalized schwinger-dyson equation in classical field theory. *Commun. Math. Phys.*, 243:275–314, 2003.
- [DL83] M. DeWilde and P. B. A. Lecomte. Existence of star-products and of formal deformations of the poisson lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 7:487–496, 1983.
- [DL88] M. DeWilde and P. B. A. Lecomte. Formal deformations of the Poisson lie algebra of a symplectic manifold and star-products. existence, equivalence, derivations. In M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber, editors, *Deformation*

*Theory of Algebras and Structures and Applications*, pages 897–960. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1988.

- [Fed96] B. V. Fedosov. *Deformation Quantization and Index Theory*. Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [HKR62] G. Hochschild, B. Kostant, and A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, 102:383–408, 1962.
- [HS91] F. Hirzebruch and W. Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis*. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1991. Unveränderter Nachdruck der Ausgabe 1971.
- [Jac89] N. Jacobson. *Basic Algebra II*. Freeman and Company, New York, 2 edition, 1989.
- [Jar81] H. Jarchow. *Locally Convex Spaces*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [Kon03] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66:157–216, 2003.
- [Pfl98] M. J. Pflaum. On continuous hochschild homology and cohomology groups. *Lett. Math. Phys.*, 44:43–51, 1998.
- [Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 2 edition, 1991.
- [Tre67] F. Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York, London, 1967.
- [Wal07] S. Waldmann. *Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung. Eine Einführung*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 2007.
- [Wei09] Stefan Weiß. *Deformation quantization of principal fibre bundles and classical gauge theories*. PhD thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2009.

# Danksagung

Danken möchte ich meiner Mutter, die mir im Laufe dieses Studiums weit mehr als nur moralischen Beistand geleistet hat. Danken möchte ich auch allen anderen, die während meiner Zeit in Freiburg unerschütterlich an meiner Seite gestanden haben und hier besonders Michael Schulze und Iosas Schindler, die mich motivierten, das Wagnis dieses Studiums einzugehen.

Vielen Dank an Stefan Waldmann für seine freundliche und kompetente Betreuung und dafür, dass er mich in seiner Abteilung aufgenommen hat. Großen Dank an Nikolai Neumaier für seine exzellenten Vorlesungen, durch die ich den Weg in die mathematische Physik gefunden habe.

Herzlichen Dank an meine Mitstreiter Dominic Maier, Patricia Calon, Jan Paki, Alexander Held, Gregor Schaumann, Torsten Kirk, Alexander Huss und Markus Hecht für ihre Korrekturarbeiten und die sowohl technische als auch moralische Unterstützung und dafür, dass sie meine Späße ertragen haben.